Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo probaremos dos generalizaciones de la Ley 0-1 de Kolmogorov: La Ley 0-1 de Lévy y la Ley 0-1 de Hewitt Savage. La Ley 0-1 de Lévy nos será útil más adelante. Al final de este capítulo utilizaremos la Ley 0-1 de Hewitt Savage para caracterizar el comportamiento asintótico de las caminatas aleatorias.

1.1. Ley 0-1 de Lévy y de Kolmogorov

Definición 1.1. *Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es decir una sucesión de σ-álgebras que satisface $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

a) Decimos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias está adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si X_n es $\mathcal{F}_n$-medible para toda $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que

1. *$E(|X_n|) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Diremos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Una martingala se puede interpretar como un fenómeno aleatorio que evoluciona en el tiempo y cuya información al tiempo n está descrita por $\mathcal{F}_n$. Un ejemplo de esto sería un modelo para el desarrollo de un juego justo.

El siguiente resultado se puede consultar en [**?**] Teo 5.2.8.

Teorema 1.2 (Convergencia de martingalas). *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sup\{E(X_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}} < \infty$ entonces existe X una variable aleatoria, $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$-medible tal que*

a) $E|X| < \infty$.

b) $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *c.s.*

Aplicando este resultado podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.3 (Teorema de Lévy hacia adelante). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, si tenemos una filtración $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ y Y una variable aleatoria integrable $\mathcal{F}$-medible entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(Y|\mathcal{G}_n) = E(Y|\mathcal{G}) \text{ c.s. y en } L^1.$$

Demostración. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n = E(Y|\mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala. En efecto

1. Para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$E(|X_n|) = E(|E(Y|\mathcal{G}_n)|) \leq E(E(|Y| \mid \mathcal{G}_n) = E(|Y|) < \infty$$

ya que Y es integrable, por lo que se cumple la condición de integrabilidad.

2. Por definición de esperanza condicional $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está adaptada a $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) = E(E(Y|\mathcal{G}_{n+1})|\mathcal{G}_n) = E(Y|\mathcal{G}_n) = E(X_n)$ ya que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$, (por la propiedad de anidamiento de la esperanza condicional).

Por 1. tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{E(X_n^+)\}_{n\in\mathbb{N}} \leq \sup\{E(|X_n|)\}_{n\in\mathbb{N}} \leq E(|Y|) < \infty$$

y por el Teorema de Convergencia de Martingalas existe una variable aleatoria X integrable y $\mathcal{G}$-medible tal que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ c.s.}$$

y el Teorema de Covergencia Dominada nos permite afirmar que la convergencia también es válida en L^1.

Nos resta que verificar que $X = E(Y|\mathcal{G})$ c.s., observemos que se tienen las siguientes propiedades:

1. X es $\mathcal{G}$-medible pues es límite de funciones $\mathcal{G}$-medibles.
2. Sea $A \in \mathcal{G}_{n_0}$. Para toda $n \geq n_0$

$$\int_A X_n dP = \int_A E(Y|\mathcal{G}_n) dP = \int_A Y dP$$

por que $A \in \mathcal{G}_{n_0} \subset \mathcal{G}_n$. Por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \int_A \lim_{n\to\infty} X_n dP = \int_A X dP = \int_A Y dP.$$

En consecuencia para toda $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ se cumple la igualdad anterior y como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ es un π-sistema en $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ tenemos que para toda $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A X dP = \int_A Y dP.$$

Por los dos puntos anteriores y por la unicidad de la esperanza condicional $X = E(Y|\mathcal{G})$ c.s.

$\square$

Corolario 1.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, si tenemos una filtración $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ y Y una variable aleatoria integrable y medible con respecto a $\mathcal{G}$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(Y|\mathcal{G}_n) = Y \ \textit{c.s. y en } L^1.$$

Demostración. Es claro por el Teorema 1.3 ya que como Y es una variable aleatoria $\mathcal{G}$ medible

$$E(Y|\mathcal{G}) = Y \text{ c.s.}$$

$\square$

Corolario 1.5 (Ley 0-1 de Lévy)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si tenemos una filtración $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$ y $A \in \mathcal{G}$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_n) = \mathbb{1}_A \ \textit{c.s. y en } L^1.$$

Demostración. Es claro inmediato del Corolario 1.4 pues $\mathbb{1}_A$ es $\mathcal{G}$-medible. $\square$

Con esto queda demostrada la ley 0-1 de Lévy la cual utilizaremos posteriormente en la tesis. Por completez deseamos dar una demostración de la ley 0-1 de Kolmogorov usando el resultado anterior. La ley 0-1 de Kolmogorov está relacionada con la σ-álgebra cola misma que definiremos a continuación.

Definición 1.6. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias en un espacio de probabilidad, sea $\mathcal{T}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, sea $\mathcal{T} := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_i$. $\mathcal{T}$ se llama la σ-álgebra cola de $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.*

Intuitivamente un elemento de la σ-álgebra cola se caracteriza por que si cambiamos un número finito de valores no afecta su ocurrencia, es decir el evento depende unicamente de la cola de la sucesión de variables aleatorias.

Teorema 1.7 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias independientes en un espacio de probabilidad, sea $A \in \mathcal{T}$ un evento en la σ-álgebra cola de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces*

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}$, sean $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ...X_n)$, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i)$. Es claro que $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ por lo cual $A \in \mathcal{F}$. Como $A \in \mathcal{T}$ en particular $A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, por lo cual A es independiente de $\mathcal{F}_n$ y así

$$E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) = P(A).$$

Como $A \in \mathcal{F}$ por la Ley 0-1 de Lévy al ser $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_A$$

de donde concluimos $P(A) \in \{0, 1\}$.

□

1.2. Ley 0-1 de Hewitt Savage y de Kolmogorov

Para poder analizar el comportamiento asintótico de las caminatas aleatorias es necesario contar con un resultado que generalice la Ley 0-1 de Kolmogorov: la Ley 0-1 de Hewitt Savage.

Observemos primero que la construcción de los borelianos en $\mathbb{R}^n$ puede ser extendida para construir los borelianos del espacio

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, ...) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.8. *Sea $\mathcal{C}$ la familia de los cilindros finito dimensionales en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es decir*

$$\mathcal{C} := \{R \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : R = (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, -\infty \leq a_i < b_i \leq \infty\}.$$

Definimos a los borelianos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \sigma(\mathcal{C})$.

El Teorema de Extensión de Kolmogorov nos da condiciones bajo las cuales si tenemos una colección de medidas $\{P^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se pueden extender de manera única a una medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, la demostración se puede consultar en [**?**] Teo A.3.1.

Teorema 1.9 (Teorema de Extensión de Kolmogorov)**.** *Sean $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad consistentes en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decir que para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $a_i < b_i$, $i = 1, 2..., n$ se tiene*

$$P^{n+1}((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}) = P^n((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]).$$

Entonces existe una única medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ tal que

$$P((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = P^n((a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]).$$

En particular podemos usar este teorema cuando $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias i.i.d. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, ...A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definimos

$$P^n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) := P(X_1 \in A_1, ...X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

y se puede extender a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ de manera única ya que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la σ-álgebra generada por los cilindros finito dimensionales y obtenemos así el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P^n)$.

Es claro que la familia $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de medidas consistentes y por el Teorema de Extensión de Kolmogorov existe una única medida de probabilidad $P^{\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $X := (X_1, X_2, ...)$:

$$P^{\mathbb{N}}(X \in B) = P^n((X_1, ..., X_n) \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

donde

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \in B; X_j(\omega) \in \mathbb{R}, j \neq 1...n\}.$$

Ahora vamos a ver un resultado que nos permitirá aproximar a los borelianos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y que nos será útil para demostrar la Ley 0-1 de Hewitt Savage. Sean $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ las sub σ-álgebras de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ definidas por

$$\mathcal{F}_i := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : A = B \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\},$$

y consideremos a las familias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ definidas a continuación

$$\mathcal{C} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i,$$

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : \text{para toda } \varepsilon > 0, \text{ existe } B \in \mathcal{C} \text{ tal que } P^{\mathbb{N}}(A \triangle B) < \varepsilon\}.$$

Proposición 1.10. $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, *es decir la familia* $\mathcal{C}$ *nos permite aproximar a cualquier conjunto de* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Demostración. Observemos que $\mathcal{C}$ es un π-sistema pues:

1. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$.

2. Sean $A, B \in \mathcal{C}$ entonces $A = C \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,$B = D \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $m = n + l$, así tenemos que $A \cap B = ((C \times \mathbb{R}^l) \cap B) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y como $(C \times \mathbb{R}^l) \cap B \in \mathbb{R}^m$, $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Veamos que $\mathcal{D}$ es un λ-sistema. De hecho probaremos que es una σ-álgebra y en consecuencia es λ-sistema.

Es claro que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$, por que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos que si $A \in \mathcal{D}$ entonces $A^c \in \mathcal{D}$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $B \in \mathcal{C}$ tal que $P^{\mathbb{N}}(A \triangle B) < \varepsilon$. Como $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $B \in \mathcal{C}$ es claro que $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $B^c \in \mathcal{C}$ y como es una propiedad de la diferencia simétrica que $A \triangle B = A^c \triangle C^c$, $P^{\mathbb{N}}(A \triangle B) = P^{\mathbb{N}}(A^c \triangle C^c)$ por lo cual $A^c \in \mathcal{D}$.

Por último veremos que si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$. Primero se verá el resultado para uniones finitas y esto se hará por inducción. Sean $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ tales que $A_i \cap Aj = \emptyset$ para $i \neq j$. Primero probemos por inducción que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ es trivial.

H.I. Supongamos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ entonces existe $B \in \mathcal{C}$ tal que

$$P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $A_{n+1} \in \mathcal{D}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que

$$P^{\mathbb{N}}(A_{n+1} \triangle c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \triangle (B\cup C)) &= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) - 2P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \cap (B\cup C)) + P^{\mathbb{N}}(B\cup C)\\
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}) - 2\big[P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap (B\cup C))\\
&+ P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}\cap (B\cup C))\big] + P^{\mathbb{N}}(B\cup C)
\end{aligned}
$$

pues $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Continuando con el desarrollo

$$
\begin{aligned}
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}) - 2\big[P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap (B^c\cap C))\\
&+ P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}\cap C) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}\cap (B\cap C^c))\big] + P^{\mathbb{N}}(B\cup C)\\
&\leq P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}) - 2\big[P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B)\\
&+ P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}\cap C)\big] + P^{\mathbb{N}}(B) + P^{\mathbb{N}}(C)\\
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \triangle B) + P^{\mathbb{N}}(A_{n+1}\triangle C) < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Así $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \in \mathcal{D}$ y por inducción $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{D}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probemos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$
P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) < \frac{\varepsilon}{2}
$$

pues $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Por la observación anterior existe $B \in \mathcal{D}$ tal que $P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo cual

$$
\begin{aligned}
P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangle B) &= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\\
&= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)
\end{aligned}
$$

pues $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. Continuando con el desarrollo

$$\begin{aligned} &\leq P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \setminus B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) + P^{\mathbb{N}}(B \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &= P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \triangle B) + P^{\mathbb{N}}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) < \varepsilon \end{aligned}$$

y se concluye que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Es decir hemos probado que $\mathcal{D}$ es un λ-sistema. El Teorema de la Clase Monótona nos permite afirmar que $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ y como $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ concluimos $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

$\square$

Con los resultados anteriores podremos estudiar la Ley 0-1 de Hewitt Savage para lo cual solo nos falta definir un par de nuevos conceptos.

Definición 1.11. *Sea $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ decimos que π es una permutación finita si es biyectiva y $\pi(n) = n$ para todo n excepto en un número finito de casos.*

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias y $X = (X_1, X_2, ...)$un vector aleatorio infinito decimal definimos

$$\pi(X) := (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, ...).$$

Si $A = \{X \in B\}$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ denotamos

$$\pi(A) := \{\pi(X) \in B\}.$$

Definición 1.12. *Decimos que un evento $A = \{X \in B\}$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ es simétrico si $\pi(A) = A$, para toda permutación finita π.*

Teorema 1.13 (Ley 0-1 de Hewitt Savage)**.** *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. y sea $A = \{X \in B\}$ un evento simétrico entonces $P^{\mathbb{N}}(A) \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Sea $A = \{X \in B\}$ un evento simétrico. Por la Proposición 1.10 para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que si

$$A_n := \{X \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A \triangle A_n) = 0. \tag{1.1}$$

Consideremos la siguiente permutación finita

$$\pi_n(m) := \begin{cases} \text{n+m} & \text{si } 1 \leq m \leq n \\ \text{m - n} & \text{si } n < m < 2n \\ \text{m} & \text{si } 2n < m. \end{cases}$$

Como las variables aleatorias $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son i.i.d para toda $n \in \mathbb{N}$

$$P^{\mathbb{N}}(X \in B) = P^{\mathbb{N}}(\pi_n(X) \in B).$$

Así

$$P^{\mathbb{N}}(A \triangle A_n) = P_X(B \triangle B_n) = P_{\pi_n(X)}(B \triangle B_n). \tag{1.2}$$

Como A es simétrico se tiene que

$$A = \{X \in B\} = \pi_n(A) = \{\pi_n(X) \in B\}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} P_{\pi_n(X)}(B \triangle B_n) &= P^{\mathbb{N}}((\pi_n(X) \in B) \triangle (\pi_n(X) \in B_n)) \\ &= P^{\mathbb{N}}((X \in B) \triangle (\pi_n(X) \in B_n)) = P^{\mathbb{N}}(A \triangle \pi_n(A_n)). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Así por (1.2) y (1.3) tenemos

$$P^{\mathbb{N}}(A \triangle A_n) = P^{\mathbb{N}}(A \triangle \pi_n(A_n)). \tag{1.4}$$

Es una propiedad de la diferencia simétrica que

$$A \triangle (A_n \cap \pi_n(A_n)) \subseteq (A \triangle A_n) \cup (A \triangle \pi_n(A_n)).$$

Por (1.4)

$$P^{\mathbb{N}}(A \triangle (A_n \cap \pi_n(A_n))) \leq P^{\mathbb{N}}(A \triangle A_n) + P^{\mathbb{N}}(A \triangle \pi_n(A_n))$$

$$= 2P^{\mathbb{N}}(A \triangle A_n)$$

por lo cual por (1.1)

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A \triangle (A_n \cap \pi_n(A_n))) = 0. \tag{1.5}$$

Como $P^{\mathbb{N}}(A\triangle A_n) = P^{\mathbb{N}}(A\backslash A_n)+P^{\mathbb{N}}(A_n\backslash A)$ por (1.1) tenemos que $\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A\backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A_n \setminus A) = 0$, por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} (P^{\mathbb{N}}(A \setminus A_n) - P^{\mathbb{N}}(A_n \setminus A)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (P^{\mathbb{N}}(A) - P^{\mathbb{N}}(A \cap A_n) + P^{\mathbb{N}}(A \cap A_n) - P^{\mathbb{N}}(A_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (P^{\mathbb{N}}(A) - P^{\mathbb{N}}(A_n)) \end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A_n) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A). \tag{1.6}$$

Análogamente por (1.4) usando (1.1)

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(\pi_n(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A) \tag{1.7}$$

y por (1.5)

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A_n \cap \pi_n(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P^{\mathbb{N}}(A). \tag{1.8}$$

Finalmente por la independencia de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} P^{\mathbb{N}}(A_n \cap \pi_n(A_n)) &= P^{\mathbb{N}}(X \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \pi_n(X) \in B_n \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n, (X_{\pi_n(1)}, X_{\pi_n(2)}, ...X_{\pi_n(n)}) \in B_n) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n, (X_{n+1}, X_{n+2}, ...X_{2n}) \in B_n) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n)P^n((X_{n+1}, X_{n+2}, ...X_{2n}) \in B_n) \\ &= P^n((X_1, X_2, ...X_n) \in B_n)P^n((X_{n+1}, X_{n+2}, ...X_{2n}) \in B_n) \\ &= P^{\mathbb{N}}(X \in B_n)P^{\mathbb{N}}(\pi_n(X) \in B_n) \\ &= P^{\mathbb{N}}(A_n)P^{\mathbb{N}}(\pi_n(A_n)) \end{aligned}$$

y por (1.6), (1.7) y (1.8), $P^{\mathbb{N}}(A) = P^{\mathbb{N}}(A)^2$ por lo cual

$$P^{\mathbb{N}}(A) \in \{0, 1\}.$$

□

Por último igual que en la sección anterior podemos ofrecemos nueva demostración de la Ley 0-1 de Kolmogorov.

Teorema 1.14 (Ley 0-1 de Kolmogorov). *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias independientes en un mismo espacio de probabilidad, sea $A \in \mathcal{T}$ un evento en la σ-álgebra de cola entonces*

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}$, sea π una permutación finita, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\pi(n) = n$. Como A está en la σ-álgebra de cola entonces $A \in \sigma(X_{n_0}, X_{n_0+1,\dots})$ por lo cual $\pi(A) = A$ y así A es un evento simétrico, en consecuencia, por la Ley 0-1 de Hewitt Savage,

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

□

1.3. Comportamiento asintótico de caminatas aleatorias

El comportamiento asíntótico de las caminatas aleatorias será central en esta tesis, en esta sección demostraremos que se puede caracterizar de una manera bastante simple.

Definición 1.15. *Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, al proceso $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\}_{n\in\mathbb{N}}$, se le conoce como caminata aleatoria.*

El siguiente teorema caracteriza el comportamiento de las caminatas aleatorias para demostrarlo utilizaremos la Ley 0-1 de Hewitt Savage.

Teorema 1.16. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces*

1. *$\limsup_{n\to\infty} S_n$ y $\liminf_{n\to\infty} S_n$ no son ambos finitos salvo en el caso trivial cuando $S_n = 0$ c.s. para toda $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Las siguientes tres posibilidades son excluyentes*

   (a) *$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ c.s.*

   (b) *$-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ c.s.*

(c) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *c.s.*

Demostración. Sean $Y = \limsup_{n\to\infty} S_n$, $A_b = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = b, b \in [-\infty, \infty]\}$. Sea π una permutación finita entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ $\pi(n) = n$. Así

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n} S_m) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n\geq n_0} S_m) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{m\geq n\geq n_0} S_m)\\ &= \lim_{n\to\infty} (\sup_{\pi(m)\geq n} S_m) = \limsup_{n\to\infty} S_{\pi(n)}\end{aligned}$$

entonces A_b es simétrico. Por la Ley 0-1 de Hewitt-Savage A_b tiene probabilidad 0 ó 1 y así existe $c \in [-\infty, \infty]$ tal que $\limsup_{n\to\infty} S_n = c$ c.s. Análogamente existe $d \in [-\infty, \infty]$ tal que $\liminf_{n\to\infty} S_n = d$ c.s.

Tenemos tres casos:

Caso 1) $c \in \mathbb{R}$**.**

Como las variables aleatorias son i.i.d. si $S_n^{'} = \sum_{i=2}^{n+1} X_i$ tenemos que

$$c = \limsup_{n\to\infty} S_n = X_1 + \limsup_{n\to\infty} S_n^{'} = X_1 + c \text{ c.s.}$$

Así $X_1 = 0$ c.s. e inductivamente $S_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ c.s. y se cumple el caso trivial. Ahora veamos que en los demás casos sucede lo enunciado en el inciso 2. de este teorema.

Caso 2) $c = \infty$**.**

Observemos que si $d \in \mathbb{R}$ como $\liminf_{n\to\infty} S_n = d$ entonces de manera análoga al caso anterior concluimos que $S_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ c.s. lo cual contradice que $c = \infty$.

Así solo tenemos dos posibilidades:

Subcaso 1) $d = \infty$**.**

Entonces $\liminf_{n\to\infty} S_n = \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ por lo que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ c.s. y se cumple 2.(a).

Subcaso 2) $d = -\infty$**.**

Entonces $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ c.s, $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ c.s. y se cumple 2.(b).

Caso 3) $c = -\infty$**.**

Como $-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n = -\infty$, se satisface $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ c.s. correspondiente al inciso 2.(c).

□

Capítulo 2

La caminata aleatoria asociada y la martingala de Wald

En este capítulo definiremos el concepto de caminata aleatoria asociada y analizaremos algunas de sus propiedades, también construiremos la martingala de Wald.

2.1. La caminata aleatoria asociada

En el capítulo anterior demostramos que las caminatas aleatorias tienen cuatro posibles tipos de comportamiento asintótico. Si determinamos el valor de la esperanza de X_1, en algunos casos podremos conocer el comportamiento asintótico de la caminata aleatoria.

Proposición 2.1. *Sea* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria tal que* $0 < E(X_1) < \infty$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ \ c.s.$$

Demostración. Sea $c = E(X_1)$ por la Ley Fuerte de los Grandes Números tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c \text{ c.s.}$$

Como $c > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $c - \varepsilon > 0$, además por el límite anterior existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$|\frac{S_n}{n} - c| < c - \varepsilon.$$

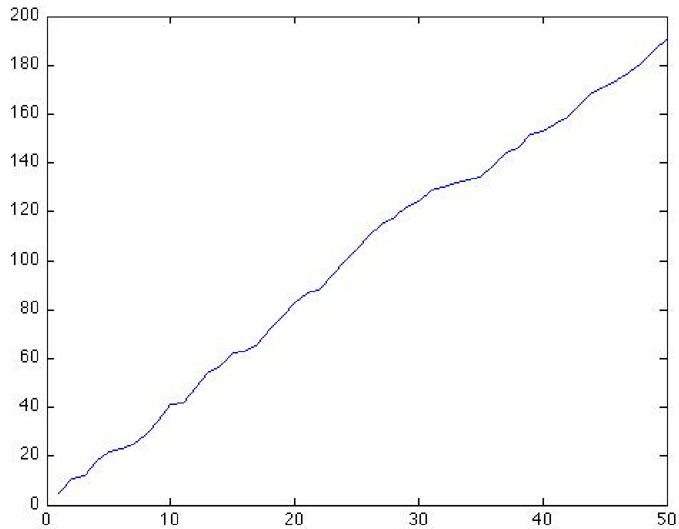

Figura 2.1: Primeros 50 pasos de una caminata aleatoria con distribución uniforme discreta en $\{1,2,3,4,5,6\}$ es decir con $E(X_1)=\frac{7}{2}$

En particular

$$c-\frac{S_n}{n}<c-\varepsilon$$

despejando

$$n\varepsilon<S_n.$$

Haciendo tender n a infinito

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty \text{ c.s.}$$

$\square$

La siguiente proposición es análoga:

Proposición 2.2. *Sea* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria tal que* $-\infty<E(X_1)<0$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_n=-\infty \ \textit{c.s.}$$

Definición 2.3. *Sea* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria con* $0 < E(X_i) < \infty$ *ó* $-\infty < E(X_i) < 0$ *y* F *la función de distribución de* X_1*, si existe* $\theta \neq 0$ *tal que*

$$E(e^{-\theta X_i}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x} dF(x) = 1$$

decimos que cumple la condición de Crámer. En tal caso definimos la función de distribución

$$F^*(s) := \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta x} dF(x).$$

La caminata aleatoria $\displaystyle S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i^* \;_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* X_i^* *tiene función de distribución* F^* *es la caminata aleatoria asociada de* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En la siguiente proposición mostramos las propiedades principales de la caminata aleatoria asociada:

Proposición 2.4. *Sea* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una caminata aleatoria tal que* $0 < E(X_1) < \infty$ *con caminata aleatoria asociada entonces*

1. θ *es positivo.*
2. θ *es único.*
3. X_i *no puede ser constante c.s. y en consecuencia* X_i^* *tampoco.*
4. $E(X_1^*) < 0$.
5. $(F^*)^* = F$.
6. *La caminata aleatoria asociada tiene caminata aleatoria asociada y es la caminata aleatoria original.*

Demostración. 1. Sea $\phi(x) := e^{-\theta x}$, $x \in \mathbb{R}$, es claro que ϕ es convexa. Entonces por la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} \phi\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)\Big) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x) \\ \phi(E(X_i)) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x} dF(x) = 1 \\ e^{-\theta E(X_i)} &\leq 1 \end{aligned}$$

como la función exponencial es creciente y $e^0 = 1$

$$-\theta E(X_i) \leq 0.$$

Así como $\theta \neq 0$ y $E(X_i) > 0$ concluímos $\theta > 0$.

2. Sea $K > 0$ una constante positiva. Observemos que por la Proposición 2.1 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}$$

Por lo que, como θ es positivo

$$\lim_{n\to\infty} -\theta S_n = -\infty \text{ c.s.}$$

lo que implica, por continuidad de la función exponencial que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\theta S_n} = 0 \text{ c.s.}$$

Si $S_n \geq -K$ entonces como θ es positivo $e^{-\theta S_n} \leq e^{\theta K}$. Así tenemos la siguiente desigualdad

$$e^{-\theta S_n}\mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}} \leq e^{\theta K}\mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}} \leq e^{\theta K}.$$

Como la función constante $e^{\theta K}$ es integrable entonces por el Teorema de Convergencia Dominada

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; S_n \geq -K) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}\mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}})$$

$$= E(\lim_{n\to\infty} e^{-\theta S_n}\mathbb{1}_{\{S_n \geq -K\}}) = E(0) = 0.$$

Así debido a que $E(e^{-\theta S_n}) = E(e^{-\theta S_n}; S_n \geq -K) + E(e^{-\theta S_n}; S_n \leq -K)$ y por la independencia de las v.a. tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}) = \lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta X_i})^n = 1 \tag{2.1}$$

en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-\theta S_n}; S_n \leq -K) = 1.$$

Supongamos que existe otro real positivo $a \neq \theta$ tal que $E(e^{-aX_i}) = 1$, tenemos dos casos:

Caso 1) $0 < a < \theta$. Una vez más tenemos que si $S_n \leq -K$ por la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} S_n(\theta - a) &\leq -K(\theta - a) \\ -aS_n &\leq -K(\theta - a) - S_n\theta \\ e^{-aS_n} &\leq e^{K(\theta - a) - S_n\theta} \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\limsup_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K) \leq \lim_{n\to\infty} E(e^{-K(\theta-a)-S_n\theta}) = e^{-(\theta-a)K}$$

la última igualdad es debida a (2.1).
Por un razonamiento análogo al que se hizo con θ, si a satisface las hipótesis de esta proposición

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \limsup_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K) \leq e^{-(\theta-a)K}.$$

Como K es positiva y arbitraria al hacer tender n a infinito, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = 0$ lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser uno.

Caso 2) $\theta < a$.

De manera análoga tendríamos que

$$e^{-(\theta-a)K} \leq= \lim_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \liminf_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}; S_n \leq -K).$$

Como K es positiva y arbitraria conluíriamos que $\lim\limits_{n\to\infty} E(e^{-aS_n}) = \infty$, lo cual es una contradicción pues este límite debe de ser uno. Una vez agotados los dos casos posibles tenemos que θ es única.

3. Supongamos que $X_i = c$ c.s. entonces

$$\begin{aligned} E(e^{-\theta X_i}) = e^{-\theta c} = 1 \\ -\theta c = 0. \end{aligned}$$

Como θ es distinto de cero $c = 0$, lo cual es una contradicción pues X_i tiene esperanza distinta de cero.

Ahora supongamos que $X_i^* = c$ c.s. tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\theta c} = E(e^{\theta X_i^*}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\theta x} dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1 \end{aligned}$$

entonces $\theta c = 0$. Como θ es distinto de cero entonces $c = 0$. Por lo cual la función de distribución F^* estaría dada por

$$F^*(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta x} dF(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq s, \end{cases}$$

como la función exponencial es estrictamente positiva y F es la función de distribución de X tendríamos que $X = 0$ c.s. lo cual es una contradicción pues la esperanza de X es positiva.

4. Razonemos de manera análoga al inciso 1. de esta proposición sea $\varphi(x) := e^{\theta x}$. φ es estrictamente convexa pues θ es distinto de cero, además como X_i^* es no constante por la desigualdad estricta de Jensen

$$\varphi\big(\int_{-\infty}^{\infty} x dF^*(x)\big) < \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF^*(x)$$
$$\varphi(E(X_i^*)) < \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

Es decir,

$$e^{\theta E(X_i^*)} = \varphi(E(X_i^*)) < 1.$$

Como la función exponencial es estrictamente creciente y $e^0 = 1$

$$\theta E(X_i^*) < 0.$$

Como $\theta > 0$ concluímos $E(X_i^*) < 0$.

5. Definamos las siguientes medidas de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu(E) := \int_E dF(x), \lambda(E) := \int_E dF^*(x)$$

Por la definición de F^* tenemos que

$$\lambda(E) = \int_E e^{-\theta x} d\mu$$

Lo que muestra que μ es absolutamete continua con respecto a λ ya que si para algún $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\lambda(E) = \int_E e^{-\theta x} d\mu = 0.$$

Entonces como $e^{-\theta x} > 0$, $\mu(E) = \int_E d\mu = 0$.

Así por la Proposición **??** del apéndice y por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym

$$\int e^{\theta x} d\lambda = \int e^{\theta x} e^{-\theta x} d\mu = \int d\mu = 1$$

En consecuencia por la definición de λ

$$E(e^{\theta X_i^*}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF^*(x) = \int e^{\theta x} d\lambda = 1.$$

Por lo cual

$$(F^*)^*(s) = \int_{-\infty}^{s} dF(x) = F(s)$$

6. Esta afirmación es inmediata por los incisos anteriores.

□

De manera análoga si la caminata aleatoria tuviera esperanza negativa tendríamos el siguiente resultado:

Proposición 2.5. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria tal que $-\infty < E(X_1) < 0$ con caminata aleatoria asociada entonces*

1. *θ es negativo.*
2. *θ es único.*
3. *X_i no puede ser constante c.s. y en consecuencia X_i^* tampoco.*
4. *$E(X_1^*) > 0$.*
5. *$(F^*)^* = F$.*
6. *La caminata aleatoria asociada tiene caminata aleatoria asociada y es la caminata aleatoria original.*

Observemos que por la Proposiciones 2.1, 2.4 y 2.5 si una caminata aleatoria S_n tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ c.s.}$$

Entonces su caminata aleatoria asociada S_n^* tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = -\infty \text{ c.s.}$$

De la misma forma si tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \text{ c.s.}$$

Entonces su caminata aleatoria asociada S_n^* tiene comportamiento asintótico

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = \infty \text{ c.s.}$$

2.2. La martingala de Wald

La existencia de la caminata aleatoria asociada también nos permite la construir una martingala:

Proposición 2.6. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una caminata aleatoria con caminata aleatoria asociada $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es decir que satisface la condición de Crámer entonces $(V_n := e^{-\theta S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala con respecto a la filtración $(\sigma(X_1, ..., X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Como $e^{-\theta x} > 0$ y $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son independientes tenemos que

$$E|V_n| = E(e^{-\theta S_n}) = (E(e^{-\theta X_i}))^n = 1$$

pues $E(e^{-\theta X_i}) = 1$, lo que prueba que V_n es integrable para toda $n \in \mathbb{N}$ y es inmediato comprobar que V_n es $\sigma(X_1, ..., X_n)$-medible.

Finalmente utilizando propiedades básicas de la esperanza condicional

$$\begin{aligned}
E(V_{n+1}|\sigma(X_1, ..., X_n)) &= E(e^{-\theta S_n} e^{-\theta X_{n+1}}|\sigma(X_1, ..., X_n)) \\
&= e^{-\theta S_n} E(e^{-\theta X_{n+1}}|\sigma(X_1, ..., X_n)) \\
&= e^{-\theta S_n} E(e^{-\theta X_{n+1}}) = e^{-\theta S_n} = V_n
\end{aligned}$$

ya que $E(e^{-\theta X_{n+1}}) = 1$.

□

Definición 2.7. *Si una caminata aleatoria $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene caminata aleatoria asociada $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ decimos que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la martingala de Wald asociada a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2.3. Ejemplos

En general no todas las caminatas aleatorias tienen caminata aleatoria asociada, a continuación un par de ejemplos.

Ejemplo 2.1 (Distribución de Poisson)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución de Poisson $Pois(\lambda)$. En este caso la caminata aleatoria no tiene caminata aleatoria asociada pues

$$\begin{aligned}
\psi(t) = E(e^{-tX_i}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-tk} e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-tk} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-t}\lambda)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{e^{-t}\lambda} = e^{\lambda(e^{-t}-1)}.
\end{aligned}$$

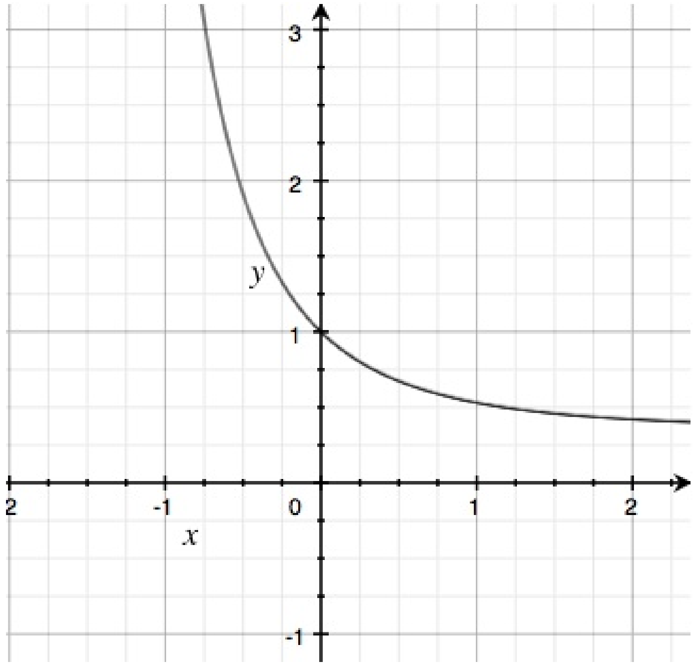

Figura 2.2: ψ en el caso $Pois(1)$

Como $\lambda > 0$, $\psi(t) = 1$ si y sólo si $t = 0$.

Ejemplo 2.2 (Distribución uniforme)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme $\mathcal{U}(a,b)$. Para poder obtener la caminata aleatoria asociada supondremos que $-\infty < a < 0 < b < \infty$ y $a + b > 0$. Así tenemos que utilizando las propiedades de la distribución uniforme

$$E(X_i) = \frac{a+b}{2} > 0$$

$$\psi(t) = E(e^{-tX_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^{-tb}-e^{-ta}}{-t(b-a)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por el Teorema de L'Hopital

$$\psi^{'}(t) = \begin{cases} \frac{-a-b}{2} & \text{si } t = 0 \\ \frac{e^{-t(a+b)}[e^{tb}(at+1)-e^{ta}(bt+1)]}{t^2(a-b)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

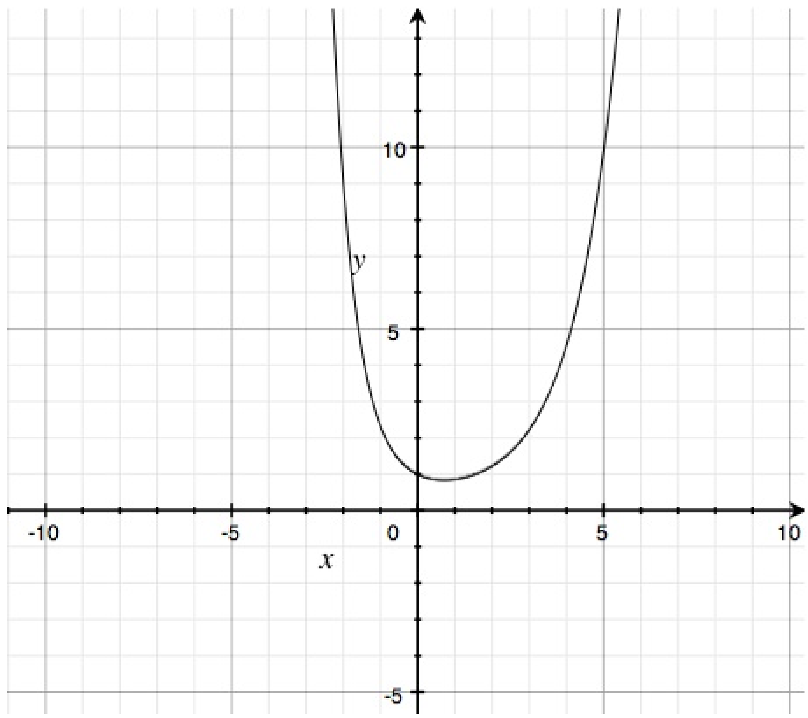

Figura 2.3: ψ en el caso $\mathcal{U}(-1, 2)$

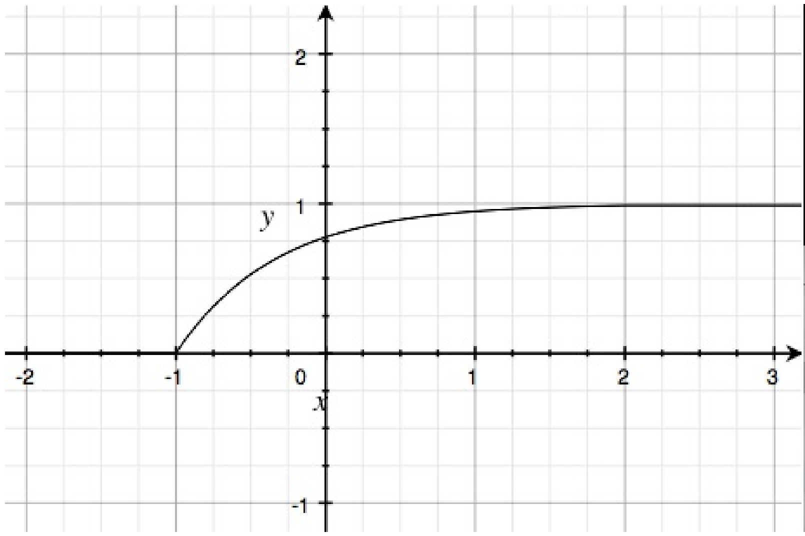

Figura 2.4: F^* en el caso $\mathcal{U}(-1,2)$

Así $\psi^{'}(0) < 0$ y la función es decreciente en un intervalo alrededor del cero. Como $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$, $\psi(0) = 1$ y ψ es continua entonces existe $\theta > 0$ tal que $\psi(\theta) = 1$ y esta caminata aleatoria tiene caminata aleatoria asociada.

Por el cálculo anterior tenemos que existe $\theta > 0$ tal que

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}}{b-a}dx = \frac{e^{-\theta b} - e^{-\theta a}}{-\theta(b-a)} = 1$$

Por lo cual la función de distribución de la caminata aleatoria asociada estaría dada por

$$F^*(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < a \\ \displaystyle\int_a^s \frac{e^{-\theta x}}{b-a}dx = \frac{e^{-\theta s} - e^{-\theta a}}{-\theta(b-a)} & \text{si } a \leq s \leq b \\ 1 & \text{si } b < s. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3 (Distribución de Laplace)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución de Laplace $L(\mu, b)$. Para poder obtener la caminata aleatoria asociada supondremos que $0 < \mu < \infty$, además recordemos que se debe satisfacer $0 < b < \infty$. Utilizando las propiedades de la distribución de Laplace

$$E(X_i) = \mu > 0, \psi(t) = E(e^{-tX_i}) = \frac{e^{-\mu t}}{1 - b^2t^2}, |t| < \frac{1}{b}.$$

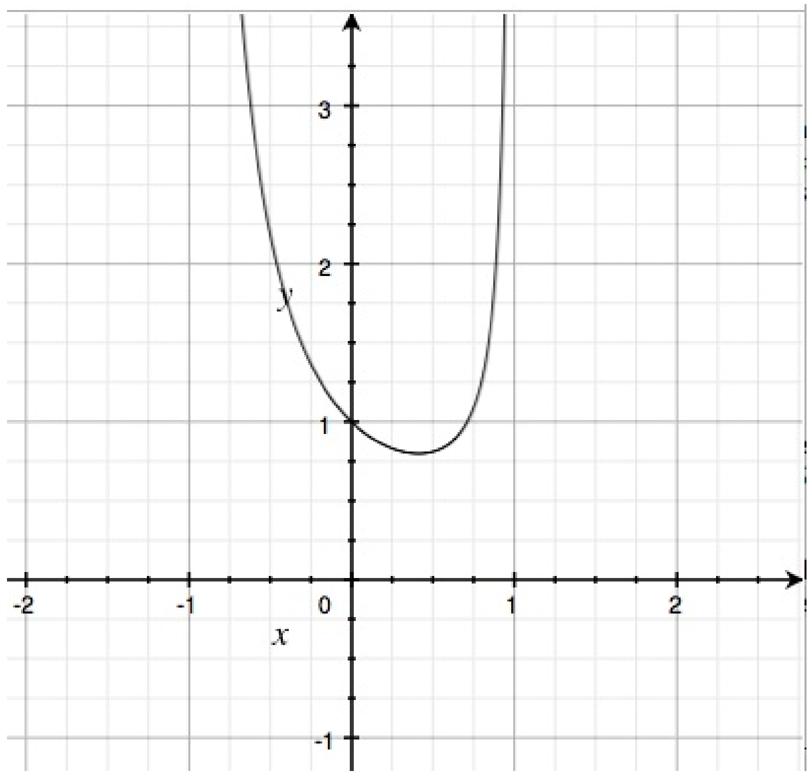

Figura 2.5: ψ en el caso $L(1,1)$

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior

$$\psi'(t) = \frac{e^{-t\mu}(\mu(b^2t^2-1)+2b^2t)}{(1-b^2t^2)^2}.$$

Así $\psi'(0) = -\mu < 0$ y la función es decreciente en un intervalo alrededor del cero. Como $\lim\limits_{t\to\frac{1}{b}} \psi(t) = \infty$, $\psi(0) = 1$ y ψ es continua entonces existe $\theta > 0$ tal que $\psi(\theta) = 1$ y esta caminata aleatoria tiene caminata aleatoria asociada.

Ejemplo 2.4 (Distribución Normal)**.** Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución Normal $N(\mu,\sigma^2)$. Para poder obtener la caminata aleatoria asociada supondremos que $0 < \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Es una propiedad de la distribución Normal que

$$\psi(t) = E(e^{-tX_i}) = e^{-\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Como queremos que la función generadora valga 1, y la función exponencial es inyectiva queremos encontrar las soluciones a la ecuación

$$-\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} = 0$$

que son $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2\mu}{\sigma^2}$. Si tomamos el primer valor construimos la misma función de distribución, por lo cual tomamos $\theta = \frac{2\mu}{\sigma^2}$ y tenemos que la función de distribución de la caminata aleatoria asociada está dada por

$$F^*(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Por lo que la caminata aleatoria asociada tiene distribución Normal $N(-\mu, \sigma^2)$. En el quinto capítulo de esta tesis estudiaremos condiciones más generales bajo las cuales un proceso gaussiano tiene un proceso asociado.