Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

CAMINATAS ALEATORIAS CONDICIONADAS A SER POSITIVAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

MAYRA DANIELA BERMÚDEZ CONTRERAS

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA

2011

1. Datos del Alumno

Bermúdez
Contreras
Mayra Daniela
5556179979
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304531916

2. Datos del tutor

Dra.
María Emilia
Caballero
Acosta

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Gerónimo Francisco
Uribe
Bravo

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Victor Manuel
Rivero
Mercado

5. Datos del sinodal 3

MC.
Henry
Pante
Trejo

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Ramsés Humberto
Mena
Chávez

7. Datos del trabajo escrito

Caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas
85 p.
2011

Índice general

Introducción

Muchas veces al pensar en el caso análogo al Movimiento Browniano en tiempo discreto, surge la idea de las caminatas aleatorias, las cuales han sido estudiadas por sus aplicaciones y por ser uno de los ejemplos más sencillos de Cadenas de Markov. Al condicionar el Movimiento Browniano a ser positivo, obtenemos un proceso de Bessel en tres dimensiones, que no es más que la norma euclideana del Movimiento Browniano en tres dimensiones. Por ello y la relación de las caminatas aleatorias con el Movimiento Browniano, resulta natural el interés en las caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas. Es curioso, que a pesar de que las caminatas aleatorias parecen mucho más simples al ser comparadas con el Movimiento Browniano, el Movimiento Browniano condicionado a ser positivo se describe y conoce antes que la caminata aleatoria condicionada a ser positiva. Uno de los primeros en estudiarla es Pitman en 1975, quien trabaja condicionando una caminata aleatoria simple $S = \{S_n\}_{n\geq 0}$, con los eventos $\bar{A}_n = (S$ llega a $[n,\infty)$ antes de llegar a$(-\infty,0))$ y estudia el límite de $\mathbb{P}(S_n|\bar{A}_n)$ cuando n tiende a infinito. Más tarde, en 1992, Keener en su artículo *Limit theorems for random walks conditioned to stay positive*, define los eventos A_n como $A_n = (S_k \geq 0$ para $0 \leq k \leq n)$, y estudia el límite de $\mathbb{P}(S_n|A_n)$, cuando n tiende a infinito para $S = \{S_n\}_{n\geq 0}$, también una caminata aleatoria simple. Así, los trabajos de Pitman y Keener difieren en la forma de definir los eventos con los que se condiciona S.
Al condicionar con los eventos A_n, Keener demuestra que las distribuciones finito dimensionales de una caminata aleatoria simple, condicionada a ser positiva tienden a las de un proceso de Markov $\{Y_n\}_{n\geq 0}$, con espacio de estados $\{0,1,2,\dots\}$, y probabilidades de transición

$$r(x,x+1) = \frac{x+2}{2(x+1)} = 1 - r(x,x-1) = \frac{x}{2(x+1)}.$$

En el tercer capítulo de esta tesis hacemos un estudio cuidadoso de esta demostración. Para ello, fue necesario usar algunas propiedades de caminatas aleatorias en general, y algunas otras más específicas de caminatas aleatorias simples. Por ello, dedicamos las primeras páginas de este trabajo a estudiar algunas de las propiedades más importantes de las caminatas aleatorias en general, como lo son su homogeneidad, la propiedad de Markov y la propiedad de

Markov fuerte. También aparecen, en la primera parte resultados de combinatoria que nos muestran como contar ciertos tipos de caminos que puede seguir una caminata aleatoria simple y la probabilidad de que ésta lo haga. Estos resultados son la herramienta principal en la demostración de Keener y pueden ser encontrados en [7].

Dos importantes construcciones para las trayectorias de una caminata aleatoria condicionada a ser positiva son las que hacen Bertoin [2] y Tanaka [11]. En el último capítulo revisamos esta última, para el caso de una caminata aleatoria S que toma valores en los números enteros. La construcción que hace Tanaka en su artículo *Time reversal of random walks in one-dimension*, consiste en invertir y pegar una a una las trayectorias entre dos nuevos mínimos de una caminata aleatoria S. El proceso que resulta de hacer esto lo denotaremos como $\{W_n\}$ y estudiaremos su función de transición $\hat{h}_\xi$. Aunque nosotros hacemos esto para el caso particular de una caminata aleatoria en los enteros, Tanaka en el mismo artículo extiende la demostración al caso general basándose en el caso particular que nosotros tratamos.

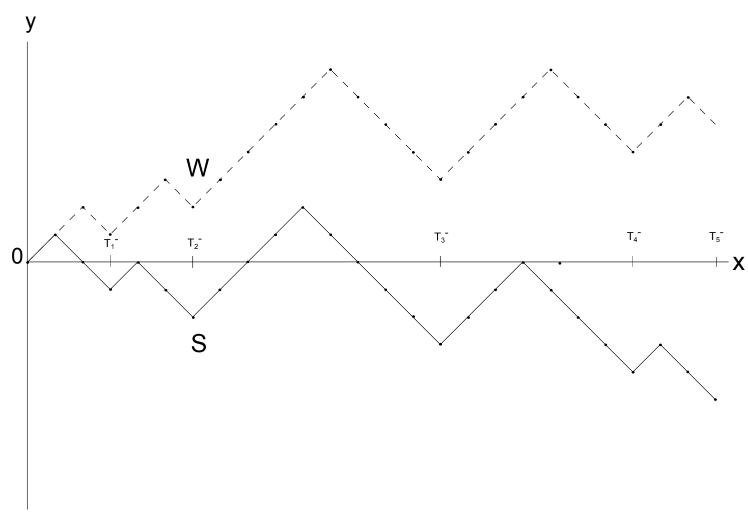

Figura 1: En esta figura se muestra una trayectoria de S y la trayectoria de $\{W_n\}$ que resulta de seguir el procedimiento que describe Tanaka.

La construcción del proceso $\{W_n\}$, como ya mencionamos, está basada en invertir las trayectorias de $\{S_n\}$ entre los puntos donde dos nuevos mínimos se alcanzan. Los procesos asociados a estos puntos y a los puntos donde nuevos máximos se alcanzan los llamaremos *puntos de escalera* y dedicamos el cuarto capítulo de la tesis a su estudio. En este capítulo veremos que los procesos de escalera son procesos de renovación, por lo que hacemos un repaso breve sobre este tipo de procesos en el Capítulo 2. Algunos resultados de este capítulo, los usaremos en el capítulo de procesos de escalera para conocer la función de renovación de dichos procesos, la cual está muy relacionada con la función de transición del proceso $\{W_n\}$. En el capítulo de procesos de escalera, también veremos el Lema combinatorio de Feller, que aunque a simple vista parece un resultado muy sencillo, nos ayuda a demostrar importantes resultados que muestran como se relaciona una caminata aleatoria con los procesos de escalera asociados a ella. El Lema de Feller y los resultados sobre procesos de escalera se encuentran en [6].

Por último, al final de esta tesis vemos un ejemplo en el que calculamos la función $\hat{h}_\xi$ para el proceso $\{W_n\}$ asociado a una camianata aleatoria simple. Para el caso de la caminata aleatoria simple simétrica, esta función se relaciona con la función de transición del proceso $\{Y_n\}$ que aparece en el trabajo de Keener, de la siguiente manera

$$r(x,y) = \hat{h}_\xi(x+1, y+1).$$

Así, en este ejemplo podemos ver que en el caso para una caminata aleatoria simple simétrica, salvo una traslación, las construcciones de Keener y Tanaka coinciden. Es decir, tenemos que $\{Y_n, n \geq 0\} = \{\bar{W}_n, n \geq 0\}$. Donde la igualdad, se refiere a igualdad en distribución, y el proceso $\{\bar{W}_n, n \geq 0\}$, se define como

$$\bar{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ 1 + W_n & \text{para } n \geq 1 \end{cases}.$$

Capítulo 1

Caminatas aleatorias.

En este capítulo daremos una introducción al concepto de caminatas aleatorias. Las definiremos y demostraremos algunas de sus propiedades más importantes. Además de estas propiedades veremos algunos resultados para un caso particular de caminata aleatoria. Los resultados sobre este tipo de caminatas aleatorias serán necesarios, pues es para este caso que aparece más adelante el primer resultado sobre caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas. Las cuales son el principal objeto de estudio en este trabajo.

1.1. Caminatas aleatorias

Empecemos pensando en el movimiento de una partícula en la recta real, y en que ésta se mueva cada cierto tiempo, pensemos que esto ocurre cada unidad de tiempo. Así al tiempo 1 la partícula se encuentra en una posición, al tiempo 2 en otra y así sucesivamente. Al graficar las posiciones de la partícula en cada momento en el plano xy donde el eje x representa el tiempo y el eje y la posición, obtenemos una trayectoria como la que se ve en la Figura 1.1.

Si la posición de la partícula en un momento específico es una función aleatoria que depende del tiempo. Bajo ciertas condiciones que veremos en la siguiente definición, el proceso de las posiciones de la partícula forman una caminata aleatoria.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, con $\mathcal{F} = P(\Omega)$, el conjunto potencia de Ω y $X, X_1, X_2, ...$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con F como su función de distribución común.

Definición 1.1. *Definimos a la caminata aleatoria* $S = \{S_n\}_{n\geq 0}$ *que empieza*

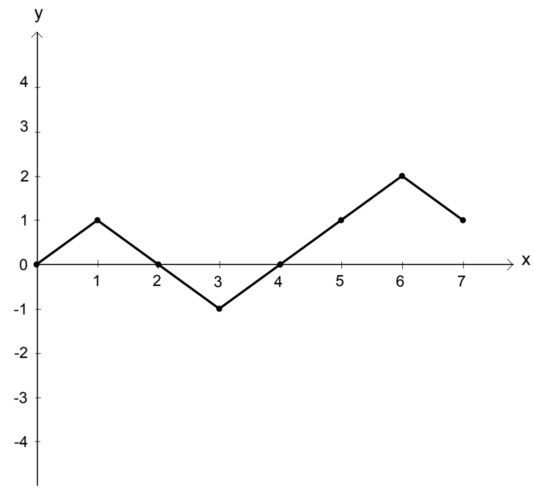

Figura 1.1: Trayectoria de una partícula en una dimensión.

en a y con función de salto F como:

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i. \ \ Con S_0 \equiv a$$

Para una caminata aleatoria $\{S_n\}_{n\geq 0}$ llamaremos a las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ *variables de salto*, y a F, la llamaremos la *ley de salto* de $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Además, denotaremos por $\mathcal{L}$ el espacio de estados de la caminata aleatoria S, que es el conjunto donde éste toma valores.

Volviendo al ejemplo del movimiento de una partícula, podemos pensar que lo que avanza la partícula al momento n está dado por la variable aleatoria X_n. Así la partícula se encontrará al momento n, en la posición S_n.

Los siguientes ejemplos son de caminatas aleatorias donde las variables de salto tienen diferentes distribuciones.

Ejemplo 1.2. *Cuando las variables de salto $X_1, X_2, \ldots$ se distribuyen Bernoulli (-1,1), donde $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ con $0 \leq p \leq 1$ y $\mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p$ se tiene una* caminata aleatoria simple. *Un caso especial de ellas es la caminata aleatoria simple simétrica, donde $p = q = 1/2$. Las caminatas aleatorias simples sólo pueden subir o bajar una unidad y toman valores en los enteros.*

Ejemplo 1.3. *Sean R_1 y R_2 variables aleatorias independientes que se distribuyen exponencial, con parámetros a y b respectivamente, y sea Y una variablea aleatoria independiente de R_1 y R_2, con distribución Bernoulli de parámetro*

$\frac{a}{a+b}$. *Definamos a* X_i *como* $X_i = R_2 \mathbb{1}_{\{Y=1\}} - R_1 \mathbb{1}_{\{Y=0\}}$, *por lo que la función de densidad de las variables de salto está dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{abe^{ax}}{a+b} & si\ x < 0 \\ \\ \dfrac{abe^{-bx}}{a+b} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Notemos que en este caso la caminata aleatoria toma valores en los reales.

Ejemplo 1.4. *Cuando las variables de salto tienen distribución normal de parámetro* σ *y* μ *tenemos una* caminata aleatoria Gaussiana.

Ejemplo 1.5. *La caminata aleatoria con distribución de salto Poisson de parámetro* λ, *es la caminata aleatoria* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *para la cual*

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k \geq 0$$

para cada una de las variables de salto. Por lo que

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{e^{-(n\lambda)}(n\lambda)^k}{k!},\ k \geq 0.$$

Con los siguientes lemas veremos que las caminatas aleatorias son cadenas de Markov homogéneas[1].

Nota 1.6. *En los siguientes lemas se enuncia y demuestra para caminatas aleatorias con espacio de estados discreto. Pero los lemas son válidos y sus demostraciones son casi idénticas para una caminata aleatoria con espacio de estados continuo.*

Lema 1.7. *La caminata aleatoria* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *es homogénea respecto al espacio, es decir*

$$\mathbb{P}(S_n = j | S_0 = a) = \mathbb{P}(S_n = j + b | S_0 = a + b).$$

Demostración. Demostraremos que ambos lados de la igualdad son iguales a $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a)$ usando la definición de que $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = j | S_0 = a) &= \mathbb{P}(a + \sum_{i=1}^{n} X_i = j) \\ &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a). \end{aligned}$$

[1] Todas las definiciones referentes a Cadenas de Markov, pueden ser encontradas en el Apéndice A

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = j + b | S_0 = a + b) &= \mathbb{P}(a + b + \sum_{i=1}^{n} X_i = j + b) \\ &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(S_n = j | S_0 = a) = \mathbb{P}(S_n = j + b | S_0 = a + b).$$

□

Lema 1.8. *La caminata aleatoria* $\{S_n\}_{n \geq 0}$ *es homogénea respecto al tiempo, es decir*

$$\mathbb{P}(S_n = j | S_0 = a) = \mathbb{P}(S_{n+m} = j | S_m = a).$$

Demostración. Veremos nuevamente que los dos lados de la igualdad son iguales a $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = j | S_0 = a) &= \mathbb{P}(a + \sum_{i=1}^{n} X_i = j) \\ &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a) \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+m} = j | S_m = a) &= \mathbb{P}(S_0 + \sum_{i=1}^{n+m} X_i = j | S_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i = a) \\ &= \mathbb{P}(S_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i + \sum_{m+1}^{n+m} X_i = j | S_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i = a) \end{aligned}$$

debido a la independencia de las variables $X_1, X_2, \ldots$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(a + \sum_{m+1}^{n+m} X_i = j) \\ &= \mathbb{P}(\sum_{m+1}^{n+m} X_i = j - a) \\ &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a). \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que las variables $X_1, X_2, \ldots$ tienen todas la misma distribución. □

Además de las propiedades que nos muestran el Lema 1.7 y el Lema 1.8 nos encontramos con que las caminatas aleatorias tienen la propiedad de que el futuro sólo depende del presente y no del pasado.

Lema 1.9. *La caminata aleatoria $\{S_n\}_{n\geq 0}$ tiene la propiedad de Markov, es decir, para toda $m,n\in\mathbb{N}$ y cualesquiera $a_0,a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ y $j\in\mathbb{R}$ se cumple que*

$$\mathbb{P}(S_{m+n}=j|S_0=a_0,S_1=a_1,\dots,S_m=a_m)=\mathbb{P}(S_{m+n}=j|S_m=a_m)$$

Demostración. Notemos primero que, debido a la independencia de las variables de salto,

$$\mathbb{P}(S_{n+m}=j|S_m=a_m)=\mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{n+m}X_i=j-a_m).$$

Por otro lado, usando la definición de probabilidad condicional y la independencia de las variables de salto en la cuarta igualdad, se obtiene:

$$\mathbb{P}(S_{m+n}=j|S_0=a_0,S_1=a_1,\dots,S_m=a_m)$$

$$=\frac{\mathbb{P}(S_{m+n}=j,S_m=a_m,S_{m-1}=a_{m-1},\dots,S_1=a_1,S_0=a_0)}{\mathbb{P}(S_m=a_m,S_{m-1}=a_{m-1},\dots,S_1=a_1,S_0=a_0)}$$

$$=\frac{\mathbb{P}(S_{m+n}-S_m=j-a_m,S_m-S_{m-1}=a_m-a_{m-1},\dots,,S_1-S_0=a_1-a_0,S_0=a_0)}{\mathbb{P}(S_m-S_{m-1}=a_m-a_{m-1},\dots,S_2-S_1=a_2-a_1,S_1-S_0=a_1-a_0,S_0=a_0)}$$

$$=\frac{\mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i=j-a_m,X_m=a_m-a_{m-1},\dots,X_2=a_2-a_1,X_1=a_1-a_0,X_0=a_0)}{\mathbb{P}(X_m=a_m-a_{m-1},X_{m-1}=a_{m-1}-a_{m-2},\dots,X_2=a_2-a_1,X_1=a_1-a_0,X_0=a_0)}$$

$$=\frac{\mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i=j-a_m)\mathbb{P}(X_m=a_m-a_{m-1})\cdots\mathbb{P}(X_2=a_2-a_1)\mathbb{P}(X_1=a_1-a_0)\mathbb{P}(X_0=a_0)}{\mathbb{P}(X_m=a_m-a_{m-1})\mathbb{P}(X_{m-1}=a_{m-1}-a_{m-2})\cdots\mathbb{P}(X_2=a_2-a_1)\mathbb{P}(X_1=a_1-a_0)\mathbb{P}(X_0=a_0)}$$

$$=\mathbb{P}(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i=j-a_m)$$

$$=\mathbb{P}(S_{m+n}=j|S_m=a_m).$$

□

De los Lemas 1.7, 1.8 y 1.9 tenemos que cualquier caminata aleatoria es una cadena de Markov homogénea.

Veamos para acabar esta sección que las caminatas aleatorias tienen la propiedad de Markov fuerte.

Teorema 1.10. *Las caminatas aleatorias tienen la propiead de Markov fuerte. Para τ un tiempo de paro (ver Definición A.3) respecto a la filtración natural $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$, donde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, se tiene que $\{S_{\tau+n} - S_\tau\}_{n\geq 0}$ es una caminata aleatoria con ley de salto F, independiente de $\mathcal{F}_\tau$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{F}_\tau$. Para todo $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\mathbb{P}(A \cap \{S_{\tau+1} - S_\tau = a_1, S_{\tau+2} - S_\tau = a_2, \dots, S_{\tau+n} - S_\tau = a_n\})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\tau = k\} \cap A \cap \{S_{\tau+1} - S_\tau = a_1, S_{\tau+2} - S_\tau = a_2, \dots, S_{\tau+n} - S_\tau = a_n\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\tau = k\} \cap A \cap \{X_{k+1} = a_1, \dots, X_{k+1} + \dots + X_{k+n} = a_n\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\tau = k\} \cap A \cap \{X_{k+1} = a_1, X_{k+2} = a_2 - a_1, \dots, X_{k+n} = a_n - a_{n-1}\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\tau = k\} \cap A)\mathbb{P}(\{X_{k+1} = a_1, X_{k+2} = a_2 - a_1, \dots, X_{k+n} = a_n - a_{n-1}\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\tau = k\} \cap A)\mathbb{P}(X_{k+1} = a_1)\mathbb{P}(X_{k+2} = a_2 - a_1) \cdots \mathbb{P}(X_{k+n} = a_n - a_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\{X_1 = a_1)\mathbb{P}(X_2 = a_2 - a_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = a_n - a_{n-1}\})
\end{aligned}$$

La cuarta igualdad se debe a que $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, y por tanto son independientes de $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots$. Las dos últimas igualdades se deben a que $X_1, X_2, \dots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. □

1.2. Algunos resultados para caminatas aleatorias simples.

A diferencia de los resultados de la sección anterior, los siguientes resultados que pueden ser encontrados en [7], no son para caminatas aleatorias en general, pero nos ayudarán a demostrar los teoremas del siguiente capítulo, en el cual trabajaremos con el que tal vez sea el caso más simple para una caminata aleatoria. A partir de ahora y hasta el final de esta sección trabajaremos con la *caminata aleatoria simple* que empieza en $a \in \mathbb{Z}$. Ver Ejemplo 1.2.

Nota 1.11. *Si $A \subset \mathbb{N}$, denotaremos a la cardinalidad de A como $|A|$.*

Definimos un camino C de longitud k como la sucesión de k puntos en el plano $(0, s_0), (1, s_1), \ldots, (k, s_k)$ y lo denotaremos como $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Ya que sabemos lo que es un camino, veamos cuál es la probabilidad de que una caminata aleatoria siga en sus primeros k pasos un camino dado, es decir que al tiempo 0 esté en s_0, al tiempo 1 esté en s_1, y así hasta que al tiempo k esté en s_k.

Lema 1.12. $\mathbb{P}(S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_k = s_k) = p^r q^l$ *con* $S_0 = a$, $s_{i+1} - s_i \in \{-1, 1\}$, *y* $r = |\{i : s_{i+1} - s_i = 1\}|, l = |\{i : s_{i+1} - s_i = -1\}|$, $0 \leq i \leq k-1$.
Es decir r es el número de saltos positivos que hace la caminata en sus primeros k pasos, y l es el número de saltos negativos que hace la caminata aleatoria en sus primeros k pasos.

Demostración. La probabilidad de que la caminata aleatoria $\{S_n\}_{n\geq 0}$ siga el camino $(s_0, s_1, ..., s_k)$, está dada por $\mathbb{P}(S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_k = s_k)$. Notemos que si existe $0 \leq i < k$ para la cual $|s_{i+1} - s_1| \neq 1$, la última probabilidad es cero. De otro modo, usando la independencia de $X_1, X_2, \ldots$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_0 = s_0, S_1 = s_1, ..., S_k = s_k) \\
= \; & \mathbb{P}(S_k - S_{k-1} = s_k - s_{k-1}, \ldots, S_1 - S_0 = s_1 - s_0, S_0 = s_0) \\
= \; & \mathbb{P}(X_1 = s_1 - s_0, X_2 = s_2 - s_1, \ldots, X_k = s_k - s_{k-1})) \\
= \; & \mathbb{P}(X_1 = s_1 - s_0)\mathbb{P}(X_2 = s_2 - s_1), \ldots, \mathbb{P}(X_k = s_k - s_{k-1}) \\
= \; & p^r q^{k-r},
\end{aligned}
$$

donde $r = |\{i : s_{i+1} - s_i = 1\}|$, con $0 \leq i \leq k$ y como $p + q = 1$ entonces $l = k - r$.

□

Ahora veamos la probabilidad de que la caminata aleatoria que empieza en a se encuentre en b al tiempo n.

Teorema 1.13. *Para* $S_0 = a$

$$\mathbb{P}_a(S_n = b) = \binom{n}{\left(\frac{n+b-a}{2}\right)} p^{\left(\frac{n+b-a}{2}\right)} q^{\left(\frac{n-b+a}{2}\right)},$$

donde $(1/2)(n+b-a)$ *es un entero que toma valores en el conjunto* $\{0, 1, \ldots, n\}$. *En otro caso* $\mathbb{P}_a(S_n = b) = 0$.

Demostración. La probabilidad de que S_n sea igual a b es la probabilidad de que la caminata aleatoria siga alguno de los caminos de longitud n que empiezan en a y terminan en b. Notemos que si la caminata aleatoria sigue un camino de longitud n, $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ que empieza en a y termina en b, es decir $s_0 = a$ y $s_n = b$, y definimos a r y a l como en el lema anterior. Entonces, como en cada uno de los n pasos sólo puede subir o bajar una unidad, el número de veces que baja una unidad más el número de veces que sube una unidad es igual a n, es decir $r + l = n$. También notemos que si el camino de longitud n empieza en a y termina en b, luego de subir r unidades y bajar l unidades a partir de a, la caminata habrá avanzado n pasos y se encontrará en la posición $s_n = b$, por lo que $a + r - l = b$. De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} r &= b - a + l && (1.1)\\ r &= n - l. && (1.2) \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} r &= (\frac{n+b-a}{2})\\ l &= (\frac{n+a-b}{2}). \end{aligned}$$

Por lo anterior, si queremos que la caminata aleatoria siga un camino de longitud n que empiece en a y termine en b, éste tendrá que tener $(\frac{n+b-a}{2})$ saltos positivos y $(\frac{n-b+a}{2})$ saltos negativos. Usando ésto y el Lema (1.12) la caminata aleatoria seguirá un camino $(s_0, \ldots, s_n)$ donde $s_0 = a$ y $s_n = b$ con probabilidad $p^{(\frac{n+b-a}{2})}q^{(\frac{n-b+a}{2})}$.
Si hacemos $M_n^r(a,b)$ el número de caminos $(s_0, s_1, ..., s_n)$ con $s_0 = a$, $s_n = b$ y $r = |\{i : s_{i+1} - s_i = 1\}|$ y $l = |\{i : s_{i+1} - s_i = -1\}|$, entonces
$M_n^{\frac{n+b-a}{2}}(a,b)\, p^{1/2(n+b-a)} q^{1/2(n-b+a)}$ es la probabilidad de que la caminata aleatoria empiece en a y termine en b en n pasos. Por lo que se tiene que

$$\mathbb{P}_a(S_n = b) = M_n^{(\frac{n+b-a}{2})}(a,b)\, p^{(\frac{n+b-a}{2})} q^{(\frac{n-b+a}{2})}.$$

Tomando en cuenta que cualquier camino que vaya de a a b en n pasos tiene que tener $(\frac{n+b-a}{2})$ saltos positivos y $(\frac{n-b+a}{2})$ negativos, la única diferencia que puede haber entre cada uno de ellos es el orden en el que se dan los saltos positivos, por lo que $M_n^{(\frac{n+b-a}{2})}$ es el número que resulta de escoger de los n pasos, $(\frac{n+b-a}{2})$ positivos, es decir $M_n^{(\frac{n+b-a}{2})} = \binom{n}{(\frac{n+b-a}{2})}$. Por lo tanto

$$P_a(S_n = b) = \binom{n}{(\frac{n+b-a}{2})} p^{(\frac{n+b-a}{2})} q^{(\frac{n+a-b}{2})},$$

donde $r = (\frac{n+b-a}{2}) \in \mathbb{N}$ y $0 \le r \le n$ para que $\binom{n}{(\frac{n+b-a}{2})}$ tenga sentido. □

Los siguientes resultados tratan de caminos más especificos que los anteriores, por lo cual es necesario introducir las siguientes definiciones.

Definición 1.14. *Definimos a $N_n(a,b)$ como el número de caminos de longitud n que empiezan en a y terminan en b.*

Definición 1.15. *Definimos a $N_n^0(a,b)$ como el número de caminos de longitud n, de a a b para los cuales existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < k < n$ y $S_k = 0$.*

En el siguiente teorema veremos que el número de caminos que existen de a a b, de longitud n, que tocan en algún momento a cero, $N_n^0(a,b)$ es igual al número de caminos que existen de $-a$ a b, de longitud n. Donde $a, b > 0$.

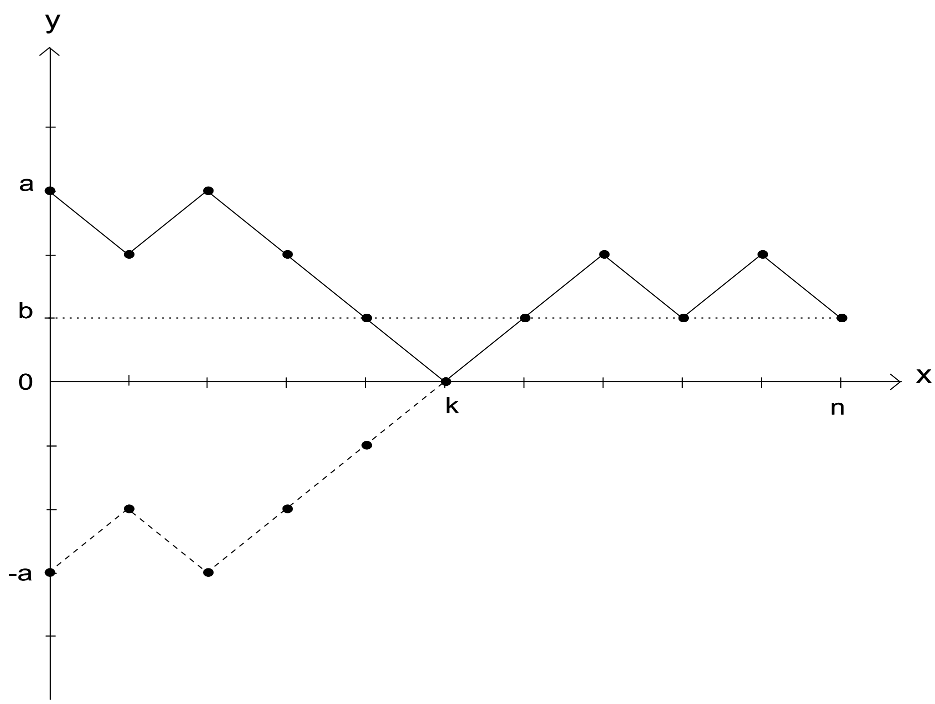

Figura 1.2: Camino de a a b de longitud n que toca a 0, y su camino reflejado hasta 0.

Teorema 1.16 (Principio de reflexión). *Si* $a, b > 0$ *entonces* $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.

Demostración. Sean $A = \{(s_0, s_1, ..., s_k, ..., s_n) | s_0 = a,\ s_n = b$ y tal que existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, tal que $s_k = 0\}$ y $B = \{(s_0, ..., s_n) | s_0 = -a, s_n = b\}$. Como $-a < 0$ y $b > 0$, para todo camino $(-a, s_1, ..., b) \in B$ existe $0 < k < n$ para el cual $s_k = 0$.
Sea $f\colon B \to A$ tal que al camino $(-a, s_1, ..., s_{k-1}, 0, s_{k+1}, ..., s_{n-1}, b)$ le asocia el camino en A $(a, -s_1, ..., -s_{k-1}, 0, s_{k+1}, ..., s_{n-1}, b)$.(Véase Figura 1.2). La función f definida de esta manera resulta ser una función biyectiva, por lo que $|A| = |B|$. □

De este teorema tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.17. *Si* $b > 0$, *y* $\frac{b}{n} \in \mathbb{N}$, *entonces el número de caminos de* 0 *a* b *que no regresan al* 0 *es* $(b/n)N_n(0,b)$.

Demostración. Notemos primero que si $b+n$ es impar $N_n(0,b) = 0 = N_n^0(0,b)$. Si $b+n$ es par, cualquier camino que empieza en cero, que no toca al 0 nuevamente y llega a b, estará en el primer paso en 1. Por lo que el número de caminos deseado es el mismo que el número de caminos de 1 a b en n-1 pasos que no tocan al 0. Este número podemos escribirlo por el Teorema 1.16 como:

$$N_{n-1}(1,b) - N_{n-1}^0(1,b) = N_{n-1}(1,b) - N_{n-1}(-1,b)$$

Y recordemos que en la demostración del Teorema 1.13, vimos que el número de caminos de longitud n que van de a a b, es $\binom{n}{1/2(n+b-a)}$. Por ello

$$N_{n-1}(1,b) - N_{n-1}(-1,b) = \binom{n-1}{(fracn-2+b2)} - \binom{n-1}{(\frac{n+b}{2})}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(\frac{n-2+b}{2})!(\frac{n-b}{2})!} - \frac{(n-1)!}{(\frac{n+b}{2})!(\frac{n-2-b}{2})!} \tag{1.3}$$

$$\tag{1.4}$$

Notemos que

$$(\frac{n-b}{2})! = (\frac{n-b}{2})(\frac{n-2-b}{2})! \text{ y } (\frac{n+b}{2})! = (\frac{n+b}{2})(\frac{n-2+b}{2})!.$$

Por lo que tenemos que (1.3) es igual a

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!}{(\frac{n-2+b}{2})!(\frac{n-2-b}{2})!(\frac{n-b}{2})} - \frac{(n-1)!}{(\frac{n-2-b}{2})!(\frac{n-2+b}{2})!(\frac{n+b}{2})} \\
&= \frac{(n-1)!}{(\frac{n-b}{2})!(\frac{n+b}{2})!}[(\frac{n+b}{2})-(\frac{n-b}{2})] \\
&= \frac{b(n-1)!}{(\frac{n-b}{2})!(\frac{n+b}{2})!} \\
&= \frac{b}{n}\frac{n!}{(\frac{n+b}{2})!(\frac{n+b}{2})!} \\
&= \frac{b}{n}\binom{n}{(\frac{n+b}{2})} \\
&= \frac{b}{n}N_n(0,b).
\end{aligned}
$$

□

Con este resultado podemos encontrar la probabilidad de que una caminata aleatoria $\{S_n\}_{n\geq 0}$ que empieza en 0 siga un camino de longitud n que termina en $b \neq 0$ y que nunca regresa a 0.

Teorema 1.18. *Si $S_0 = 0$, entonces para todo $n \geq 1$ y $b \neq 0$*

$$\mathbb{P}(S_1, S_2, ..., S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b) \text{ y } \mathbb{P}(S_1, S_2, ..., S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\mathbb{E}|S_n|.$$

Demostración. Caso1:
Supongamos $b > 0$.

$\mathbb{P}(S_1, ..., S_n \neq 0, S_n = b)$ es la probabilidad de todos los caminos que empiezan en 0, no regresan a 0 y terminan en b, por el Corolario 1.17 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1, ..., S_n \neq 0, S_n = b) &= \frac{b}{n}N_n(0,b)p^{1/2(n+b)}q^{1/2(n-b)} \\
&= \frac{b}{n}\mathbb{P}(S_n = b) \\
&= \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b).
\end{aligned}
$$

Caso 2: Supongamos $b < 0$.

Sea $B_n(a,b)$ el número de caminos que empiezan en a, terminan en b y no regresan a a. Entonces

$$\mathbb{P}(S_1,...,S_n \neq 0, S_n = b) = B_n(0,b)p^{(\frac{n+b}{2})}q^{(\frac{n-b}{2})}.$$

Sean A = {Caminos de 0 a b que no tocan el cero}, B = {Caminos de 0 a $-b$ que no tocan el cero}, entonces $(s_0 = 0, s_1, ..., s_n = b) \mapsto (0, -s_1, ..., -s_n = -b)$ es una biyección entre A y B, así $|A| = |B|$. De donde concluímos que $B_n(0,b) = B_n(0,-b)$. Por lo tanto $\mathbb{P}(S_1,...,S_n \neq 0, S_n = b) = B_n(0,-b)p^{(\frac{n+b}{2})}q^{(\frac{n-b}{2})}$.

Como $-b > 0$, nuevamente, por el Corolario 1.17 tenemos que

$$B_n(0,-b)p^{(\frac{n+b}{2})}q^{(n-b)} = \frac{-b}{n}N_n(0,-b)p^{(\frac{n+b}{2})}q^{(\frac{n-b}{2})}.$$

Además $N_n(0,-b) = N_n(0,b)$, de lo cual

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_1,...,S_n \neq 0, S_n = b) \\ = & \frac{-b}{n}N_n(0,b)p^{(\frac{n+b}{2})}q^{(\frac{n-b}{2})} \\ = & \frac{-b}{n}\mathbb{P}(S_n = b) \\ = & \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b). \end{aligned}$$

Por lo que para toda $b \neq 0$ y $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(S_1, S_2, ..., S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b).$$

Ahora veremos que $\mathbb{P}(S_1, S_2, ..., S_n \neq 0) = \frac{1}{n}\mathbb{E}|S_n|$. Por lo anterior

$$\begin{aligned} & \sum_{b\neq 0}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, ..., S_n \neq 0, S_n = b) \\ = & \sum_{b\neq 0}\frac{|b|}{n}\mathbb{P}(S_n = b) \\ = & \frac{1}{n}\sum_{b=1}^{\infty}|b|\,\mathbb{P}(S_n = b) + |b|\,\mathbb{P}(S_n = -b) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_1, S_2, ..., S_n \neq 0) \\
= \quad & \frac{1}{n}\sum_{b=1}^{\infty} |b|\,\mathbb{P}(S_n = b) + |b|\,\mathbb{P}(S_n = -b) \\
= \quad & \frac{1}{n}\sum_{b=1}^{\infty} |b|\mathbb{P}(|S_n| = |b|) \\
= \quad & \frac{1}{n}\mathbb{E}(|S_n|).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Procesos de renovación

En el capítulo anterior dimos una introducción a las caminatas a aleatorias y pusimos las bases necesarias para demostrar el primer resultado sobre caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas en este trabajo. Ahora, en este capítulo reunimos los conocimientos sobre procesos de renovación que serán necesarios cuando trabajemos más adelante con todo tipo de caminatas aleatorias, no sólo simples. Empezaremos definiendo los procesos de renovación para posteriormente definir su función de renovación. Ésta jugará un papel muy importante en la construcción de las trayectorias de una caminata condicionada a ser positiva. Veremos también algunos resultados importantes sobre los procesos de renovación.

2.1. Procesos de renovación

Pensemos en la llegada de clientes de manera aleatoria a una tienda en un día. Supongamos que éstos no tienen ningún tipo de interacción, por lo que el tiempo en el que llega cada cliente a la tienda es independiente del tiempo en el que llegan los demás clientes. Pensemos también que la función que nos dice cuánto tiempo hay entre la llegada de un cliente a la tienda y el siguiente, es la misma para cada pareja de éstos que llega de manera consecutiva. Por la forma en la que llegan los clientes a la tienda, se tiene que una vez que llega un cliente, la probabilidad de que llegue un siguiente es la misma probabilidad de que llegue un cliente por primera vez en el día, por lo que podemos pensar que el proceso de la llegada de los clientes se está renovando constantemente con cada llegada de un cliente a la tienda. El proceso de los tiempos en los que llegan los clientes a la tienda es un *proceso de renovación*. Este tipo de procesos reciben su nombre por la última característica que mencionamos en este ejemplo.

En esta sección definiremos lo que es un proceso de renovación y veremos algunas propiedades generales de esta clase de procesos, las cuales pueden ser encontradas en [7].

Definición 2.1. *Sean $T_1, T_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas con $F(x) = \mathbb{P}(T_1 \le x)$ como función de distribución. Definimos al proceso de renovación asociado a la sucesión $\{T_i\} i \ge 1$ como:*

$$W_0 = 0 \text{ y } W_n = T_1 + \dots + T_n.$$

A las variables aleatorias $T_1, T_2, \dots$ las llamaremos tiempos interarribo*, y al proceso $\{N_t\}_{t \ge 0}$ definido como:*

$$N_t = \text{máx}\{n \ge 0 : W_n \le t\}$$

lo llamaremos el proceso de conteo asociado a $\{W_n\}_{n \ge 0}$.

Dentro de los procesos de renovación nos encontramos con los procesos de renovación defectivos, para los cuales la función de distribución de los tiempos interarribo es defectiva, esto es :

$$\lim_{x \to \infty} F(x) < 1,$$

por lo que $\mathbb{P}(T_1 = \infty) > 0$. Para un proceso defectivo $q = 1 - \lim_{x \to \infty} F(x)$ es interpretada como la probabilidad de terminación del proceso.

Notemos que en un proceso de renovación el n-ésimo evento ocurre en el tiempo $W_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Si el n-ésimo evento ocurre antes del tiempo t, entonces al tiempo t han ocurrido por lo menos n eventos. Recíprocamente si al tiempo t han ocurrido al menos n eventos, entonces el n-ésimo evento ocurre antes del tiempo t, por lo que se da la siguiente igualdad de eventos:

$$(N_t \ge n) = (W_n \le t)$$

Con esto presente veremos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.

$$\mathbb{P}(N_t < \infty) = 1 \textit{ para toda } t \textit{ si y sólo si } \mathbb{E}(T_1) > 0.$$

Demostración.

Supongamos que $\mathbb{E}(T_1) \le 0$, como T_1 es no negativa, tenemos que $\mathbb{E}(T_1) = 0$, y por ello $\mathbb{P}(T_1 = j) = 0$ para toda $j > 0$, pues de otra manera, al ser T_1 no negativa

$$\mathbb{E}(T_1) = \sum_{j=0}^{\infty} j \, \mathbb{P}(T_1 = j) > 0,$$

lo cual es una contradicción, por lo que efectivamente $\mathbb{P}(T_1 = j) = 0$ para todo $j > 0$ y $\mathbb{P}(T_1 = 0) = 1$. Por lo que

$$1 = \mathbb{P}(\text{máx}\{n : T_i + T_2 + \cdots + T_n \leq t\} = \infty) = \mathbb{P}(N_t = \infty).$$

Ahora, supongamos que $\mathbb{E}(T_1) > 0$, así existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{P}(T_i > \epsilon) = \delta > 0$.

Sea $A_i = \{T_i > \epsilon\}$ y $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = lim\,sup\,A_i$, evento en el cual para una infinidad de índices $T_i > \epsilon$. Y $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} {A_m}^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{m=n}^{\infty} {A_m}^c)$. Ahora bien, por ser los tiempos inter-arribo independientes y ya que $\mathbb{P}(T_i \leq \epsilon) = 1 - \delta$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{m=n}^{\infty} {A_m}^c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} (1-\delta)^{m-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}(A^c) = 0$.
Por otro lado, como $\epsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ para el cual $r\epsilon > t$. Y si existen una infinidad de índices para los cuales T_i es mayor que ϵ. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$, para el cual $T_1 + \cdots + T_r > t$, por lo que el evento $(W_n \leq t, \forall\, n \in \mathbb{N}) \subseteq A^c$ y $P(W_n \leq t, \forall\, n \in \mathbb{N}) \leq P(A^c) = 0$, de donde

$$\mathbb{P}(N_t = \infty) = \mathbb{P}(N_t \geq n, \forall\, n \in N) = P(W_n \leq t\, \forall\, n \in N) = 0.$$

□

Recordemos que la función de distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes con distribución H y G está dada por la convolución de H y G, la cual denotamos como $H^\star G$, con esta idea denotaremos a $F^{(n)\star}$ la convolución de F consigo misma n veces, por lo que

$$\mathbb{P}(W_n \leq t) = \mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_n \leq t) = F^{(n)\star}(t).$$

En el siguiente lema veremos que la probabilidad de que hayan ocurrido n eventos hasta el tiempo t está dada en términos de las funciones de distribución para W_n y W_{n+1}.

Lema 2.3. $\mathbb{P}(N_t = k) = F^{k\star}(t) - F^{k+1\star}(t)$

Demostración.

$$\begin{aligned} (N_t = k) &= (N_t \geq k)\backslash(N_t \geq k+1) \\ &= (W_k \leq t)\backslash(W_{k+1} \leq t) \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(W_k \leq t) - \mathbb{P}(W_{k+1} \leq t) \\ &= F^{k\star}(t) - F^{k+1\star}(t). \end{aligned}$$

□

Además de la función de distribución para los tiempos de incidencia de los eventos, es de mucha importancia en el estudio de los procesos de renovación, la esperanza del número de eventos ocurridos al tiempo t.

Definición 2.4. *Definimos a la función de renovación $U(t)$ asociada al proceso $\{N_t\}_{t\geq 0}$ como la esperanza de éste.*

$$U(t) = \mathbb{E}(N_t),\ t \geq 0$$

Podemos escribir a $U(t)$ en términos de la función de distribución de los tiempos interarribo.

Lema 2.5.

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k\star}(t)$$

Demostración. Empecemos definiendo la siguiente función indicadora

$$\mathbb{1}_{\{W_k \leq t\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } W_k \leq t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así podemos escribir con el uso de $\mathbb{1}_{\{W_k \leq t\}}$ a N_t como $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{W_k \leq t\}}$, y

$$U(t) = \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{W_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{W_k \leq t\}}) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k\star}(t).$$

□

A la siguiente ecuación la llamaremos ecuación de renovación y veremos que $U(t)$ es solución de ésta.

Teorema 2.6. $U(t) = F(t) + \int_0^t U(t-x)\,dF(x)$

Demostración. La esperanza de N_t podemos escribirla como $E(E(N_t|T_1))$.

Ahora fijémonos en el valor para $E(N_t|T_1 = x)$ en los siguientes casos:
Si $t < x$, $E(N_t|T_1 = x) = 0$, pues el primer evento ocurre después del tiempo t.
Si $x \leq t$, una vez que ocurre el primer evento en el tiempo x, el proceso a partir de ese momento es una replica del proceso original:

$$E(N_t|T_1 = x) = 1 + E(N_{t-x}).$$

Así,

$$\begin{aligned}
U(t) &= E(E(N_t|T_1 = x)) \\
&= \int_0^{\infty} E(N_t|T_1 = x)dF(x) \\
&= \int_0^{t} E(N_t|T_1 = x)dF(x) + \int_t^{\infty} E(N_t|T_1 = x)dF(x) \\
&= \int_0^{t} 1 + E(N_{t-x})dF(x) \\
&= F(t) + \int_0^t U(t-x)dF(x)
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado involucra una ecuación del mismo tipo que la ecuación de renovación.

Teorema 2.7. *La función μ dada por*

$$\mu(t) = H(t) + \int_0^t H(t-x)dU(x),$$

con H uniformemente acotada, es una solución de la ecuación de tipo renovación

$$\mu(t) = H(t) + \int_0^t \mu(t-x)dF(x)$$

Veremos que μ de esta forma cumple la ecuación de renovación dada.

Demostración. Denotemos para dos funciones h y g de variación acotada a

$$h * g(t) = \int_0^t h(t-x)dg(x),\ t \geq 0,$$

de esta forma $\mu = H + H * U$ y $U = F + U * F$, por lo que

$$\begin{aligned} \mu * F &= (H + H * U) * F = H * F + H * U * F \\ &= H * F + H * (U * F) = H * (F + U * F) \\ &= H * U = \mu - H, \end{aligned}$$

Por lo que $\mu = H + \mu * F$.

□

Teorema 2.8. *Sea* $\mu = \mathbb{E}(T_1)$, *entonces*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}$$

casi seguramente.

Demostración. Notemos que $W_{N(t)} \leq t < W_{N(t)+1}$ para toda t.
Si $N(t) > 0$

$$\frac{W_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{W_{N(t)+1}}{N(t)+1}(1 + \frac{1}{N(t)}).$$

Y recordemos que la ley fuerte de los grandes números nos dice que si tenemos variables aleatorias $\{T_i\}$, indepedientes e identicamente distribuidas, el promedio de n de estas variables tiende a la esperanza de T_1 cuando n tiende a infinito casi seguramente,

$$\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} \frac{T_1 + \cdots + T_n}{n} = E(T_1)) = 1.$$

Como $N(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, entonces

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W_{N(t)}}{N(t)} \leq \lim_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} \quad \leq \quad \lim_{t \to \infty} \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}(1 + \frac{1}{N(t)}.)$$

De aquí,

$$\mu \ \leq \lim_{t \to \infty} \frac{t}{N(t)} \quad \leq \quad \mu,$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

□

Capítulo 3

Procesos de escalera.

Definiremos en este capítulo los procesos estocásticos de escalera asociados a una caminata aleatoria. Éstos nos facilitarán el estudio de las caminatas aleatorias y nos ayudarán a encontrar una clasificación muy importante de ellas. El motivo principal por el cual dedicamos este capítulo al estudio de los procesos de escalera, es que estos jugarán un papel muy importante en el estudio de las caminatas condicionadas a ser positivas.
En este capítulo veremos los diferentes tipos de procesos de escalera que existen y veremos también que todos ellos son procesos de renovación. Por lo cual podemos asociar a los procesos de escalera, su correspondiente función de renovación. Estudiaremos esta función y veremos intepretaciones que ésta puede tener. Al final de éste capítulo veremos como se relaciona una caminata aleatoria con sus procesos de escalera. Estos y otros resultados sobre procesos de escalera pueden ser encontrados en [6].

3.1. Definición de los procesos de escalera.

Para una caminata aleatoria $\{S_n\}_{n\geq 0}$, con $S_0 = 0$, nos fijamos en los puntos de ésta que resultan ser nuevos máximos, es decir cuando la caminata aleatoria alcanza un valor mayor a todos los que había tomado antes.

Definición 3.1. *Sean $T_0 \equiv 0$, $H_0 \equiv 0$, $T_{n+1} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{N} : S_r > H_n\}$ y $H_n = S_{T_n}$. Los puntos de la forma $(T_n, H_n)_{n\geq 0}$ son los puntos de nuevos máximos, a estos los llamaremos puntos de escalera ascendentes, y a los procesos $\{T_n\}_{n\geq 0}$ y $\{H_n\}_{n\geq 0}$ los llamaremos procesos de tiempos de escalera ascendentes y alturas de escalera ascendentes respectivamente.*

Así como para los procesos de escalera ascendentes nos fijamos en los nuevos máximos de la caminata aleatoria, nos fijaremos en los puntos donde nuevos mínimos se alcanzan y los llamaremos puntos de escalera descendentes.

Definición 3.2. *Los tiempos y los valores donde nuevos mínimos se alcanzan los denotaremos como* T_n^- *y* H_n^- *y están dados por:*

$$T_0^- \equiv 0,\ H_0^- \equiv 0,\ T_{n+1}^- = \text{ínf}\{r \in \mathbb{N} : S_r < H_n\} \text{ y } H_n^- = S_{T_n^-}.$$

Los procesos $\{T_n^-\}_{n\geq 0}$ *y* $\{H_n^-\}_{n\geq 0}$ *son los procesos de tiempos y alturas de escalera descendentes. Los puntos de escalera descendentes son las parejas formadas por estos dos procesos* $(T_n^-, H_n^-)_{n\geq 0}$.

Nota 3.3. *Los procesos de escalera pueden ser defectivos, es decir*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) < 1,$$

y en este caso, la probabilidad de que estos se terminen es

$$\mathbb{P}(T_n = \infty) = 1 - \lim_{x\to\infty} F(x) > 0.$$

En el caso en el que no tenemos la restricción de tener nuevos máximos o nuevos mínimos, sino simplemente máximos y mínimos, se dan los procesos débiles de escalera, ya sean ascendentes o descendentes.

Definición 3.4. *Denotaremos por* $(\bar{T}_n, \bar{H}_n)_{n\geq 0}$ *y* $(\bar{T}_n^-, \bar{H}_n^-)_{n\geq 0}$ *a los puntos de escalera débiles ascendentes y descendentes respectivamente. Los procesos débiles ascendentes se definen como:*

$$\bar{T}_0 \equiv 0,\ \bar{H}_0 \equiv 0,\ \bar{T}_{n+1} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{N} : S_r \geq \bar{H}_n\} \text{ y } \bar{H}_n = S_{\bar{T}_n}.$$

Análogamente se definen los procesos de escalera débiles desendentes como:

$$\bar{T}_0^- \equiv 0,\ \bar{H}_0^- \equiv 0,\ \bar{T}_{n+1}^- = \text{ínf}\{r \in \mathbb{N} : S_r \leq \bar{H}_n^-\} \text{ y } \bar{H}_n^- = S_{\bar{T}_n^-}.$$

Los procesos de escalera, ya sean crecientes o decrecientes, débiles o normales son procesos de renovación.

Teorema 3.5. *Las variables aleatorias* $\{(\mathcal{T}_n, \mathcal{H}_n), n \geq 1\}$, *con* $\mathcal{T}_n = T_n - T_{n-1}$ *y* $\mathcal{H}_n = H_n - H_{n-1}$ *para* $n = 1, 2, \ldots,$ *forman una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.*

Demostración. Usando el Teorema 1.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{T}_n = j, \mathcal{H}_n \in dx) &= \mathbb{P}(T_n - T_{n-1} = j, H_n - H_{n-1} \in dx) \\
&= \mathbb{P}(S_{T_{k-1}+1} - S_{T_{k-1}} \leq 0, \ldots, S_{T_{k-1}+j-1} - S_{T_{k+1}} \leq 0, \\
&\qquad S_{T_{k-1}+j} - S_{T_{k-1}} > 0, S_{T_{k-1}+j} - S_{T_{k-1}} \in dx) \\
&= \mathbb{P}(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \ldots, S_{j-1} \leq 0, S_j > 0, S_j \in dx) \\
&= \mathbb{P}(\mathcal{T}_1 = j, \mathcal{H}_1 \in dx).
\end{aligned}$$

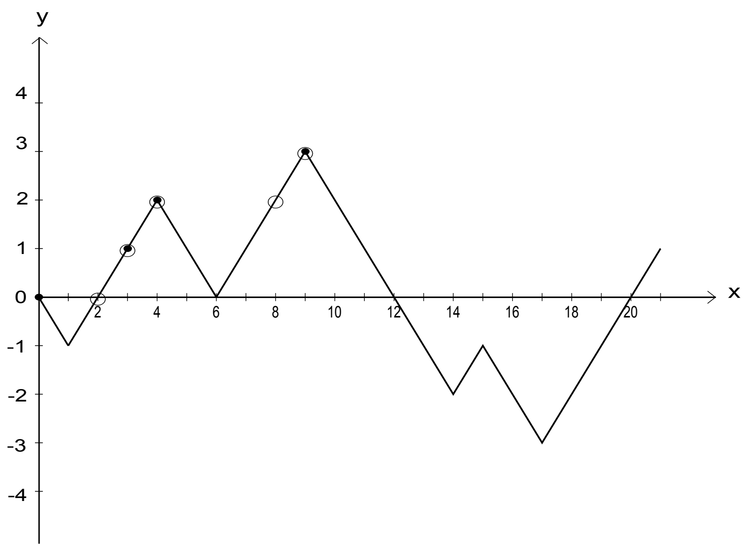

Figura 3.1: Trayectoria de una caminata aleatoria con sus puntos de escalera ascendentes, y débiles ascendentes. Los puntos de escalera ascendentes están marcados con un círculo negro, y con un círculo blanco los puntos débiles ascendentes.

Por lo que la sucesión $\{(\mathcal{T}_n, \mathcal{H}_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas.
También por el Teorema 1.10, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\mathcal{T}_n = k, \mathcal{H}_n \in dx, \mathcal{T}_{n+1} = j, \mathcal{H}_{n+1} \in dy) \\
= \; & \mathbb{P}(T_n - T_{n-1} = k, H_n - H_{n-1} \in dx, T_{n+1} - T_n = j, H_{n+1} - H_n indy) \\
= \; & \mathbb{P}(S_{T_{n-1}+1} - S_{T_{n-1}} \leq 0, \ldots, S_{T_{n-1}+k-1} - S_{T_{n-1}} \leq 0, S_{T_{n-1}+k} - S_{T_{n-1}} > 0, \\
& \; S_{T_{n-1}+k} - S_{T_{n-1}} \in dx, S_{T_n+1} - S_{T_n} \leq 0, \ldots, S_{T_n+j-1} - S_{T_n} \leq 0, S_{T_n+j} - S_{T_n} > 0, \\
& \; S_{T_n+j} - S_{T_n} \in dx) \\
= \; & \mathbb{P}(S_{T_{n-1}+1} - S_{T_{n-1}} \leq 0, \ldots, S_{T_{n-1}+k-1} - S_{T_{n-1}} \leq 0, S_{T_{n-1}+k} - S_{T_{n-1}} > 0, \\
& \; S_{T_{n-1}+k} - S_{T_{n-1}} \in dx) \\
\times \; & \mathbb{P}(S_{T_n+1} - S_{T_n} \leq 0, \ldots, S_{T_n+j-1} - S_{T_n} \leq 0, S_{T_n+j} - S_{T_n} > 0, S_{T_n+j} - S_{T_n} \in dx) \\
= \; & \mathbb{P}(\mathcal{T}_n = k, \mathcal{H}_n \in dx)\mathbb{P}(\mathcal{T}_{n+1} = j, \mathcal{H}_{n+1} \in dy)
\end{aligned}
$$

□

Ya que hemos visto que los procesos de escalera son procesos de renovación, buscaremos para los procesos de alturas de escalera su función de renovación

(Definición 2.4).

Para el primer tiempo de escalera y la primer altura de escalera denotaremos a su función de distribución conjunta como

$$G(n,x) = \mathbb{P}(T_1 = n, H_1 \leq x),$$

y las distribuciones marginales para T_1 y H_1 están dadas por

$$\mathbb{P}(T_1 = n) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(T_1 = n, H_1 \leq x) = G(n,\infty)$$

y

$$\mathbb{P}(H_1 \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = n, H_1 \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} G(n,x).$$

Definimos a $G(x) = \mathbb{P}(H_1 \leq x)$, es decir G es la función de distribución de H_1. Como vimos en el Lema 2.5, la función de renovación asociada a un proceso de renovación está dada por la suma infinita de las funciones de distribución de cada uno de los tiempos interarribo, por lo que la función de renovación para el proceso $\{H_n\}$ es:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{n\star}(x),\ x \geq 0.$$

Ya que hemos encontrado la función de renovación para el proceso de alturas de escalera ascendentes $\psi(x)$, trataremos de expresar, en términos de ésta, a la función de distribución para la primera altura de escalera débil.

Lema 3.6. *La función de distribución de la primera altura de escalera débil $\bar{G}$, puede ser escrita como:*

$$\bar{G} = \xi\psi_0^I + (1-\xi)G,$$

donde $\xi = \mathbb{P}(\bar{H}_1 = 0)$, y $\psi_0^I(x) = \mathbb{1}_{\{x\in I\}}$.

Demostración. Recordemos que $\bar{T}_1$ es el primer tiempo en el que la caminata toma un valor mayor o igual a cero, y $\bar{H}_1$ el valor que se toma en este primer momento. Es claro que $\bar{H}_1$ puede ser igual o menor que H_1. Si la caminata aleatoria regresa al 0 sin haber tomado valores positivos, $\bar{H}_1 = 0$. Si $\bar{H}_1 \neq 0$, la caminata aleatoria alcanza un valor positivo antes de volver a 0, y en este caso $H_1 = \bar{H}_1$.
Sea $\xi = \mathbb{P}(\bar{H}_1 = 0)$, por lo que

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 < 0, \ldots, S_{n-1} < 0, S_n = 0).$$

Y como $\bar{H}_1 \neq 0$ si $X_1 > 0$, etonces $0 \leq \xi < 1$. En el caso en el que $\bar{H}_1 \neq 0$, la caminata aleatoria alcanza un valor positivo antes de volver al cero, por lo que $\bar{H}_1 = H_1$. Entonces $\mathbb{P}(\bar{H}_1 = H_1) = 1 - \xi$.
Si denotamos como $\bar{G}$ la función de distribución de $\bar{H}_1$, y definimos para I un intervalo fijo la función ψ_0 como:

$$\psi_0^I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= \mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x | \bar{H}_1 = H_1)\mathbb{P}(\bar{H}_1 = H_1) + \mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x | \bar{H}_1 \neq H_1)\mathbb{P}(\bar{H}_1 \neq H_1), \end{aligned}$$

y recordemos que en el caso en el que $\bar{H}_1 \neq H_1$, $\bar{H}_1$ toma el valor 0, por lo que

$$\mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x | \bar{H}_1 = \bar{H}_1)\mathbb{P}(\bar{H}_1 = \bar{H}_1) + \mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x | \bar{H}_1 \neq H_1)\mathbb{P}(\bar{H}_1 \neq H_1)$$

$$= (1 - \xi)\mathbb{P}(H_1 \leq x) + \xi\mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x | \bar{H}_1 \neq H_1).$$

En el caso en que $\bar{H}_1 \neq H_1$, se tiene que $\bar{H}_1 = 0$, por lo que $\bar{H}_1 \leq x$ para toda $x \in [0, \infty)$ y $\bar{H}_1 > x$ para $x \in (-\infty, 0)$, así

$$\mathbb{P}(\bar{H}_1 \leq x | \bar{H}_1 \neq H_1) = \psi_0^{(0,\infty)}(x).$$

Por lo tanto,

$$\bar{G}(x) = (1 - \xi)G(x) + \xi\psi_0(x), \; x \geq 0.$$

$\square$

Aunque hemos encontrado $\bar{G}$, no expresaremos a $\bar{\psi}$, la función de renovación para el proceso débil ascendente en términos de $\bar{G}$. Resulta más fácil, expresar a $\bar{\psi}$ en términos de ψ.

Lema 3.7. *Sea ψ la función de renovación del proceso de escalera ascendente y $\xi = \mathbb{P}(\bar{H}_1 = 0)$. Entonces para la función de renovación del proceso de escalera débil ascendente, se tiene que*

$$\bar{\psi} = \frac{1}{1 - \xi}\psi.$$

Demostración. Sea N el número de veces que la caminata aleatoria regresa al 0 antes de tomar el primer valor positivo y definamos

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{H}_l = 0,\ l \in \{1, 2 \ldots, j\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si la caminata aleatoria no ha tomado valores positivos, entonces cada vez que regresa al cero se alcanza un máximo por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(I_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(I_j = 1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(\bar{H}_l = 0\ l \leq j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \xi^j = \frac{1}{1-\xi} \end{aligned}$$

Así el número esperado de máximos que hay entre dos nuevos máximos es $\dfrac{1}{1-\xi}$. Por lo que se esperan tener $\dfrac{1}{1-\xi}$ por cada nuevo máximo entonces, el número esperado de máximos es $\bar{\psi} = \dfrac{1}{1-\xi}\psi$.

□

Notemos que $\mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = 0) = \mathbb{P}(S_1 < 0, \ldots, S_{n-1} < 0, S_n = 0)$ pues el número de caminos que permanecen positivos hasta el momento $n-1$ y al momento n están en cero es igual al número de caminos que permanecen negativos hasta el momento $n-1$ y al momento n están en cero. Y para alcanzar el cero en el momento n se tiene que haber ascendido lo mismo que se descendió. Por esto

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbb{P}(\bar{H}_1 = 0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 < 0, \ldots, S_{n-1} < 0, S_n = 0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(\bar{H}_1^- = 0) \end{aligned}$$

donde $\bar{H}_1^- = 0$ el es primer tiempo de escalera débil decreciente.

Así el argumento que usamos para los procesos débiles crecientes es el mismo para los decrecientes y si ψ^- es la funcion de renovación para el proceso de escalera creciente y $\bar{\psi}^-$ es la función de renovación para el proceso de escalera débil decreciente, entonces

$$\bar{\psi}^- = \frac{1}{1-\xi}\psi^-.$$

Ahora que ya hemos calculado la función de renovación para los procesos de escalera, veamos que nos dice ésta y con ello poder ver una útil clasificación de las caminatas aleatorias.

3.2. Dualidad

Llamaremos a $(S_k, S_{k+1}, \ldots, S_{n-1}, S_n)$, $k < n$ una *sección* de la caminata aleatoria $\{S_n\}$. Para $k = 0$, la sección $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ queda definida por n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definición 3.8. *Sean $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ las cuales están dadas de la siguiente manera, $X_1^* = X_n, X_2^* = X_{n-1}, \ldots, X_{n-1}^* = X_2, X_n^* = X_1$. Definimos a la sección dual de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ como $(S_0^*, S_1^* \ldots, S_n^*)$, donde $S_0^* = 0$ y $S_k^* = \sum_{j=1}^{k} X_j^*$.*

Podemos ver que la gráfica de la sección dual de $(S_0, \ldots, S_n)$ es una rotación de 180 grados de ésta. Por ello, podemos ver fácilmente que las veces que sube la caminata aleatoria en la sección $(S_0, \ldots, S_n)$, es igual a las mismas veces que lo hace su sección dual $(S_0^*, \ldots, S_n^*)$. Lo mismo ocurre con las veces que bajan $(S_0, \ldots, S_n)$ y $(S_0^*, S_1^*, \ldots, S_n^*)$, por lo que intuitivamente $(S_0, \ldots, S_n)$ y $(S_0^*, \ldots, S_n^*)$ tienen las mismas distribuciones conjuntas.

Lema 3.9. *La sección de la caminata aleatoria $(S_0, \ldots, S_n)$ tiene las mismas distribuciones conjuntas que su sección dual, esto es*

$$\mathbb{P}(S_1 = a_1, \ldots, S_n = a_n) = \mathbb{P}(S_1^* = a_1, \ldots, S_n^* = a_n)$$

Demostración. Para la sección $(S_1, \ldots, S_n)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_1 = a_1, \ldots, S_n = a_n) \\
= \ & \mathbb{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_1 + X_2 + \cdots + X_n = a_n) \\
= \ & \mathbb{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2 - a_1, \ldots, X_n = a_n - a_{n-1}) \\
= \ & \mathbb{P}(X_1 = a_1)\mathbb{P}(X_2 = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = a_n - a_{n-1})
\end{aligned}$$

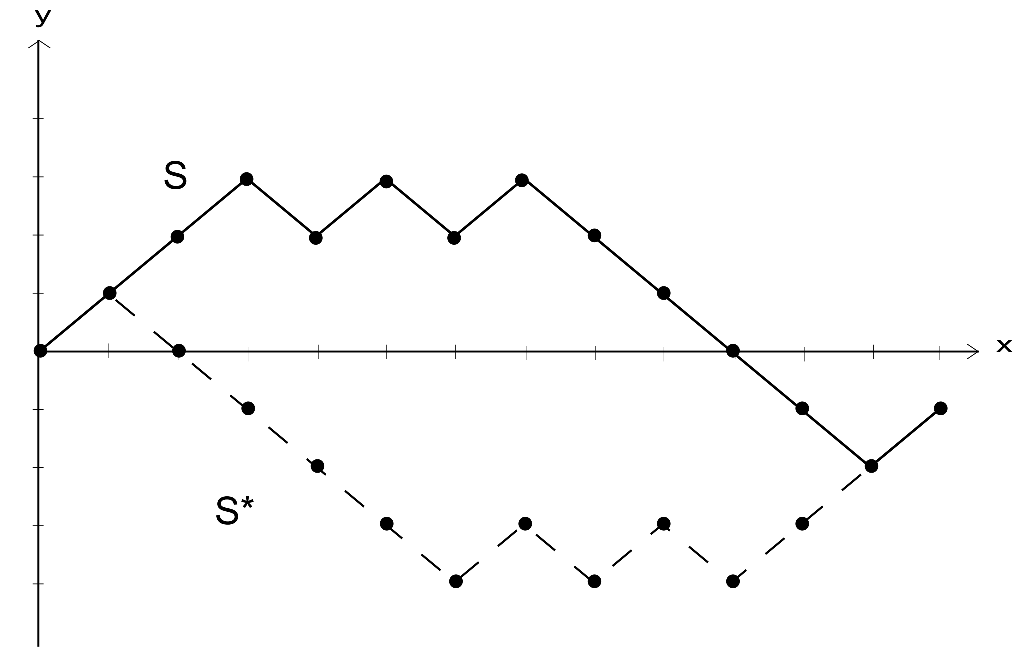

Figura 3.2: Trayectoria de una caminata aleatoria y su trayectoria dual.

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_1^* = a_1, \dots, S_n^* = a_n) \\
= \; & \mathbb{P}(S_n - S_{n-1} = a_1, S_n - S_{n-2} = a_2, \dots, S_n = a_n) \\
= \; & \mathbb{P}(X_n = a_1, \dots, X_1 + X_2 + \cdots + X_n = a_n) \\
= \; & \mathbb{P}(X_n = a_1, X_{n-1} = a_2 - a_1, \dots, X_1 = a_n - a_{n-1}) \\
= \; & \mathbb{P}(X_n = a_1)\mathbb{P}(X_{n-1} = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(X_1 = a_n - a_{n-1}) \\
= \; & \mathbb{P}(X_1 = a_1)\mathbb{P}(X_2 = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = a_n - a_{n-1})
\end{aligned}
$$

□

Hemos probado el Lema para caminatas aleatorias discretas, pero para camianatas aleatorias continuas la prueba es casi idéntica.

Con este resultado podemos demostrar que la función de renovación para el proceso de alturas crecientes tiene dos diferentes interpretaciones.

Lema 3.10. *Para un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, la función $\psi(I)$ puede ser interpretada como:*

(i) El número esperado de puntos de escalera con la segunda coordenada en I.
(ii) El número esperado de visitas de la caminata aleatoria $\{S_n\}$ al intervalo I hasta antes del primer momento en que la caminata aleatoria deja de ser positiva.

Demostración. Para un evento A que depende de $S_0, S_1, \ldots, S_n$, por el Lema 3.2, la probabilidad de A es igual a la probabilidad del evento A^*, el cual es el evento análogo a A reemplazando S_k por S_k^*. De esta manera el evento $(S_n > S_k$ para toda $0 \leq k < n)$ tiene la misma probabilidad que el evento $(S_n^* > S_{n-k}^*,$ para $1 \leq k \leq n) = (S_n > S_n - S_k$para toda $1 \leq k \leq n)$, que es igual al evento $(S_k > 0$ para $1 \leq k \leq n)$. Por lo que para un intervalo I:

$$\mathbb{P}(S_n > S_k \text{ para } 0 \leq k < n, S_n \in I) \quad = \quad \mathbb{P}(S_k > 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n, S_n \in I),$$

lo que quiere decir que la probabilidad de que (n, S_n) sea un punto de escalera con ordenada en I es igual a la probabilidad de que al momento n esté en el intervalo I, y nunca haber pasado antes por una altura negativa. Si sumamos la igualdad anterior tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n > S_k \text{ para } 0 \leq k < n, S_n \in I) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k > 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n, S_n \in I)$$

donde del lado derecho tenemos la esperanza del número de veces que la caminata aleatoria está en I y siendo hasta ese momento positiva. Del lado izquierdo tenemos el número esperado de puntos de escalera en el intervalo I, es decir del lado izquierdo tenemos $\psi(I)$. $\square$

Con este lema veremos que podemos clasficar las caminatas aleatorias en tres diferentes tipos.

Teorema 3.11. *Existen sólo 3 tipos de caminatas aleatorias:*
(i)Las oscilantes, en las que los procesos de renovación de escalera creciente y decreciente son persistentes. S_n oscila con probablidad 1 entre $-\infty$ e ∞, es decir $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ y $\liminf_{n\to\infty} = -\infty$, además
$\mathbb{E}(T_1) = \infty$ *y* $\mathbb{E}(T_1^-) = \infty$

(ii)La caminata tiende a $-\infty$. El proceso de escalera creciente es terminante y el decreciente es propio. Con probabilidad 1, $\limsup_{n\to\infty} S_n = -\infty$ y alcanza un máximo finito $M \geq 0$. Además
$\mathbb{E}(T_1) = \dfrac{1}{1-\xi}\psi(\infty) = \dfrac{1}{(1-\xi)(1-G(\infty))}$

(iii)La caminata tiende a ∞. El proceso de escalera decreciente es terminante y el creciente es propio. Con probabilidad 1, $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ y alcanza un

mínimo finito $m \leq 0$. *Además*
$\mathbb{E}(T_1^-) = \dfrac{1}{1-\xi}\psi^-(\infty) = \dfrac{1}{(1-\xi)(1-G^-(\infty))}$

Demostración. En la demostración del lema anterior vimos que

$$\mathbb{P}(S_n > S_k \text{ para } 0 \leq k < n, S_n \in I) = \mathbb{P}(S_k > 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n, S_n \in I).$$

Por el mismo argumento usado para ver esta igualdad y tomando $I = (0,\infty)$, se tiene que

$$\mathbb{P}(S_n \geq S_k \text{ para } 0 \leq k < n) = \mathbb{P}(S_k \geq 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n).$$

La probabilidad del lado izquierdo de esta última igualdad equivale a la probabilidad de que n sea un tiempo débil de escalera ascendente, mientras que la probabilidad del lado derecho equivale a la probabilidad de que el primer tiempo de escalera descendente sea mayor que n. Así para la función de renovación del proceso débil descendente $\bar{\psi}$, la esperanza del número de puntos débiles de escalera, es:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\infty) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \geq S_k \text{ para } 0 \leq k < n, S_n \in I) \\ &= \mathbb{P}(S_k \geq 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \mathbb{P}(T_1^- \leq n)].\end{aligned}$$

De aquí y del Teorema 3.7

$$\frac{1}{1-\xi}\psi(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \mathbb{P}(T_1^- \leq n)].$$

Por ello, si T_1^- es defectiva la serie diverge y $\psi(\infty) = \infty$, por lo que $\{T_k\}$ no puede ser un proceso defectivo. Con lo cual demostramos que no puede ser que los procesos de escalera ascendente y descendente, ambos terminen. Así tenemos que los dos procesos son persistentes o sólo uno de los dos termina.

Por ser T_1^- una variable positiva, $\mathbb{E}(T_1^-) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- > n)$, por lo que

$$\mathbb{E}(T_1^-) = \frac{1}{1-\xi}\psi(\infty) = \frac{1}{(1-\xi)(1-G(\infty))},$$

debido a que si $\{T_k\}$ es un proceso defectivo entonces $\psi(\infty) = \sum_{n=0} G^n(\infty) = \dfrac{1}{1-G(\infty)}$. Por lo que $\mathbb{E}(T_1^-) < \infty$ si y sólo si $G(\infty) < 1$, es decir si y sólo si, el proceso $\{T_1\}$ es defectivo. Por lo que alguno de los procesos $\{T_k\}$, $\{T_k^-\}$ es defectivo, o $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_1^-) = \infty$.

Supongamos que T_1^- es terminante, entonces $\mathbb{E}(T_1^-) = \infty$, por lo que el proceso $\{T_k\}$ es defectivo, entonces la probabilidad de que el proceso sobreviva al tiempo n, es igual a $(1 - G(\infty))^n$. Y esta probabilidad tiende a 0 cuando n tiende a infinito, por lo que la probabilidad de que el proceso termine en un tiempo finito es igual a 1. Por ello, la probabilidad de que el exista un último punto de escalera es igual a uno y $M = \max\{S_1, S_2, \dots\} < \infty$. Análogamente con probabilidad uno $m = \min\{S_1, S_2, \dots\} > -\infty$ si el proceso $\{T_k^-\}$ es defectivo.

□

3.3. Lema combinatorio de Feller y otros resultados.

Empezaremos esta sección con el lema combinatorio de Feller que nos dice cómo calcular el número de puntos de escalera de un camino de manera sencilla. Para después con este resultado relacionar las ditribuciones de la caminata aleatoria $\{S_n\}$ con las de los procesos de escalera asociados a ella.

Sea $p_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una sucesión de n números, diremos que $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$ es el camino generado por p_0, si $s_k^0 = \sum_{i=1}^{k} x_i$. Definamos a p_i como la i-ésima permutación cíclica de p_0, por lo que $p_i = (x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_i)$. De igual manera que para s^0, s^i es el camino generado por la i-ésima permutación cíclica de p_0.
Decimos que $v > 0$ es un tiempo de escalera si $s_v > s_j$ para $0 < j \le v - 1$.

Lema 3.12 (Lema combinatorio de Feller)**.** *Sea $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ un camino donde $s_n > 0$ y $x_r = s_r - s_{r-1}$, $r = 1, 2, \dots, n$, donde $s^0 = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ es el camino generado por $p_0 = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces existe una permutación cíclica de p_0, p_v y s^v el camino generado por ella, de tal manera que n en s^v es un tiempo de escalera. Además si existen r permutaciones cíclicas de p_0 que cumplen ésto, entonces cada uno de los caminos generados por ellas tienen exactamente r tiempos de escalera.*

Demostración. Notemos que s_k^i lo podemos escribir en terminos de s^0 como:

$$s_k^i = \begin{cases} s_{k+i}^0 - s_i^0 & \text{para}\, k = 1, 2, \ldots, n-i \\ s_n^0 - s_i^0 + s_{k+i-n}^0 & \text{para}\, k = n-i+1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.1}$$

Si tomamos $v = \inf\{i : s_i^0 > s_j^0,\ \text{para}\, 1 \le j \le i-1,\ s_i^0 \ge s_j^0,\ \text{para}\ i \le j \le n\}$, podemos escribir utilizando (3.1) a s_n^v como $s_n^v = s_n^0 - s_v^0 + s_v^0 = s_n^0$. Por la definición de v, $s_{k+v}^0 - s_v^0 \le 0$ para $0 \le k \le n-v$ y $s_{k+v-n}^0 - s_v^0 < 0$ para $n-v < k \le n$ por lo que

$$s_k^v = s_{v+k}^0 - s_v^0 < 0 < s_n^0 = s_n^v \text{ para } k = 1, \ldots, n-v \text{ y}$$

$$s_k^v = s_n^0 - s_v^0 + s_{k+v-n}^0 < s_n^0 = s_n^v \text{ para } k = n-v+1, \ldots, n$$

Por lo tanto $s_n^v > s_k^v$ para $k < n$ por lo que n es un tiempo de escalera en s^v.

De esta forma, tenemos que dada p_0 existe una permutación cíclica de p_0, en la que el camino generado por ella tiene a n como tiempo de escalera.
Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad que p_0 es tal que s^0 tiene a n como tiempo de escalera. Veamos que si existen r permutaciones cíclicas de p_0, todas ellas distintas, para las cuales n es un tiempo de escalera, entoces s^0 tiene exactamente r tiempos de escalera. Para ello veamos que n es tiempo de escalera en s^j si y sólo si j es un tiempo de escalera en s^0.

Sea p_j, permutación cíclica de p_0, para la cual s^j tiene a n como tiempo de escalera. Supongamos que j no es un tiempo de escalera en s^0, por lo que existe $m < j$ tal que $s_m^0 \ge s_j^0$. Recordemos que para $k \in \{n-j+1, \ldots, n-1\}$ podemos escribir a s_k^j como
$s_k^j = s_n^0 - s_j^0 + s_{k+j-n}^0$ con $k+j-n \in \{1, \ldots, j-1\}$,
por lo que para cierta k_0 tal que $m = k_0 + j - n$ y $m < n$, se tiene que
$s_k^j = s_n^0 - s_j^0 + s_m^0 \ge s_n^0 = s_n^j$ con $k_0 \in \{n-j+1, \ldots, n-1\}$
lo cual es una contradicción pues n es un tiempo de escalera para s^j, por lo tanto j es tiempo de escalera en s^0.

Ahora veamos que si j es tiempo de escalera en s^0, entonces n es tiempo de escalera en s^j.

Como j es tiempo de escalera en s^0, $s_j^0 > 0$, se tiene que para $k \in \{1, \ldots, n-j\}$

$$s_k^j = s_{k+j}^0 - s_j^0 \leq s_n^0 - s_j^0 < s_n^0 = s_n^j$$

y para $k \in \{n-j+1, \ldots, n-1\}$ tenemos que $k < n$, por lo que

$k - n < 0 \Rightarrow k + j - n < j$, por ser j un tiempo de escalera para s^0, $s_{k+j-n}^0 < s_j^0$

entonces $-s_j^0 + s_{k+j-n}^0 < 0$

con lo que podemos concluir que para $k \in \{n-j+1, \ldots, n-1\}$ $s_k^j = s_n^0 - s_j^0 + s_{k+j-n}^0 < s_n^0 = s_n^j$

Por lo tanto para $k \leq n-1 s_k^j < s_n^j$

Por lo tanto, n es tiempo de escalera para s^v.
Así tenemos que s^0 tiene exactamente r caminos $s^{j_1}, \ldots, s^{j_r}$ para los cuales n es tiempo de escalera, cada uno de los r_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ es tiempo de escalera de s^0 y si j es tiempo de escalera para s^0, entonces s^j tiene a n como tiempo de escalera y por lo tanto si s^0 tiene r caminos para los cuales n es tiempo de escalera, entonces s^0 tiene exactamente r tiempos de escalera. $\square$

Ahora usando el lema anterior, veamos que

Teorema 3.13. *Para $x > 0$ tenemos que* $\dfrac{\mathbb{P}(S_n \in dx)}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}\mathbb{P}(T_k = n, H_k \in dx)$

Demostración. Sea A el conjunto de todos los caminos de longitud n que terminan en x, y B_k el conjunto de todos los caminos de longitud n que terminan en x, donde n es el k-ésimo tiempo de escalera y S_n toma el valor x.
Ahora definamos las siguiente relación de equivalencia para caminos de longitud n:
$a \sim b$ si y sólo si a está generado por una potencia de la suceción de variables que genera a b, notemos que en cada clase de equivalencia hay exactamente n elementos, ahora definamos a $\bar{A}$, $\bar{B}_k$ los conjuntos de las clases de equivalencia bajo $\sim$, así:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(S_n = x)}{n} &= \frac{1}{n}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{a \in A} a\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{a \in A}\mathbb{P}(a) \\
&= \sum_{\bar{a} \in \bar{A}}\mathbb{P}(\bar{a}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\bar{b} \in \bar{B}_k}\mathbb{P}(\bar{b}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{b \in B_k}\mathbb{P}(b) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathbb{P}(T_k^+ = n, H_k^+ = x)
\end{aligned}$$

□

De este teorema tenemos consecuencias importantes.

Corolario 3.14. $1 - \mathbb{E}(r^{T_1^+}e^{itH_1^+}) = \exp[-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n}\mathbb{E}(e^{itS_n} : S_n > 0)]$

Demostración. Por el teorema anterior, para $n \geq 1$ y $j > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(S_n = j)}{n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{P}(T_k = n, H_k = j) \\
\text{por lo que } \frac{\mathbb{P}(S_n = j|S_n > 0)}{n} r^n e^{itj} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{P}(T_k = n, H_k = j) r^n e^{itj} \\
\text{sumando sobre } n \text{ y } j \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n = j|S_n > 0)}{n} r^n e^{itj} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{P}(T_k = n, H_k = j) r^n e^{itj} \\
\text{por ello } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(e^{itj}|S_n > 0)\frac{r^n}{n} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{P}(T_k = n, H_k = j) r^n e^{itj} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}(e^{itH_k} r_k^T) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}[\mathbb{E}(e^{itH_1} r_1^T)]^k \\
&= -log(1 - \mathbb{E}(e^{itH_1} r^{T_1}))
\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } 1 - \mathbb{E}(r^{T_1^+} e^{itH_1^+}) = \exp[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\mathbb{E}(e^{itS_n} : S_n > 0)]$$

□

Corolario 3.15. $1 - \mathbb{E}(r^{T_1^+}) = \exp[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\mathbb{P}(S_n > 0)]$

Demostración. Usando el Corolario 3.14 con $t = 0$, la demostración es inmediata.

□

Capítulo 4

Primeros resultados.

En este cuarto capítulo tendremos nuestro primer encuentro con las caminatas aleatorias condicionadas a ser positivas, caminatas que permanecen en la parte superior del plano. En esta parte, los resultados que aparecen son para caminatas aleatorias simples. El objetivo de esta parte de la tesis será mostrar que el límite de las distribuciones finito dimensionales de una caminata aleatoria simple, condicionada a ser positiva tienden a las distribuciones finito dimensionales de un proceso de Markov que veremos más adelante.

De acuerdo a lo que vimos en el capítulo anterior, una caminata aleatoria presenta uno y sólo uno de los siguientes comportamientos: tiende a menos infinito, tiende a infinito o ésta oscila entre infinito y menos infinito. Si una caminata aleatoria S_n tiende a infinito, ésta alcanza un mínimo $m \geq 0$ casi seguramente (Teorema 3.11). Por ello condicionar a S_n a ser positiva en el caso en el que ésta tiende a infinito, no presenta dificultades técnicas. Debido a ésto ponemos atención en los casos en los que la caminata aleatoria S_n oscila o tiende a menos infinito. En este capítulo nos concentraremos en este último caso.

En un primer intento de condicionar una caminata aleatoria a ser positiva podríamos pensar simplemente en condicionar con el evento

$$A = (S_k \geq 0 \text{ para toda } k).$$

El problema con seguir esta idea es que $\mathbb{P}(A) = 0$, para caminatas que tienden a menos infinito o que son oscilantes. Entonces condicionar con A no tiene sentido si se hace directamente. Podemos ver que en [9] Pitman resuelve este problema para una caminata aleatoria simple $\{S_n\}$ tomando el límite de los eventos $\bar{A}_n = (S \text{ llega a } [n, \infty) \text{ antes de llegar a } (-\infty, 0))$ que claramente tienden a A cuando n tiende a ∞. Este mismo problema es resuelto por Keener en [8], también tomando el límite de eventos que tienden a A. Estos eventos están definidos de manera distinta a la que lo hace Pitman. Keener define los eventos para una caminata simple $\{S_n\}$ que tiende a menos infinito como $A_n = (S_k \geq 0 \text{ para } 0 \leq k \leq n)$. El límite de las distribuciones finito dimensionales condicionando con estas dos familias distintas de eventos coincide sólo en el caso de la camianta aleatoria simple simétrica [8]. Nosotros estudiaremos el límite de las distribuciones finito dimensionales de una camianta aleatoria condicionada con los eventos A_n. Esto lo haremos siguiendo el artículo [8] de Keener, quien considera por primera vez condicionar con estos eventos.

4.1. Primeros resultados

Como ya mencionamos, en este capítulo consideraremos caminatas aleatorias simples que tienden a menos infinito. Trabajaremos condicionando con los eventos A_n, para los cuales $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Sea $\{S_n\}$ una caminata aleatoria simple para la cual $\mathbb{P}(S_n \to -\infty) = 1$ y al igual que en el primer capítulo, $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con respecto a la medida de probabilidad P, y tal que $P(X_i = 1) = p$ y $P(X_i = -1) = q = 1 - p$, con $0 < p < 1/2$, además $P(S_n = b|S_0 = 0) = P(S_n = b)$. También introduciremos nuevas medidas de probabilidad P^a, P_0 y P_0^a para las cuales $X_1, X_2, \ldots$ son también variables aleatorias independientes, $P_0(X_i = 1) = 1/2 = P_0(X_i = -1)$ y $P_0(S_n = b|S_0 = 0) = P_0(S_n = b)$.
Y para P_0^a y P^a se tienen las mismas distribuciones marginales que P_0 y P respectivamente, es decir $P_0^a(S_n = b) = P_0(S_n = b|S_0 = a)$ y $P^a(S_n = b) = P(S_n = b|S_0 = a)$.

Empecemos viendo como se relacionan P^a y P_0^a.

Lema 4.1. $P^a(S_n = j) = P_0^a(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}$

Demostración. Por el Teorema (1.13) del primer capítulo, y reagrupando correctamente tenemos que

$$\begin{aligned} P^a(S_n = j) &= \binom{n}{(\frac{n+j-a}{2})} p^{(\frac{n+j-a}{2})} q^{(\frac{n-j+a}{2})} \\ &= \binom{n}{\frac{n+j-a}{2}} p^{(\frac{n+j-a}{2})} q^{(\frac{n-j+a}{2})} (1/2)^n 4^{n/2} \\ &= \binom{n}{\frac{n+j-a}{2}} (1/2)^n (4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2} (q/p)^{a/2} \\ &= P_0^a(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}. \end{aligned}$$

□

Sea $\tau = \text{ínf}\{n : S_n < 0\}$. Para τ definido de esta manera podemos escribir al evento $A_n = \{S_k \geq 0,\ \text{para } 0 \leq k \leq n\}$ como $A_n = (\tau > n)$.

Lema 4.2. $P^a(\tau > n | S_n = j) = P_0^a(\tau > n | S_n = j)$

Demostración. Sea W el número de caminos para los cuales $S_0 = a, S_n = j$ y $S_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$, por lo que

$$P^a(\tau > n, S_n = j) = W\, p^{1/2(n+j-a)} q^{1/2(n-j+a)}. \tag{4.1}$$

Por el Lema 4.1 y (4.1)

$$\begin{aligned}
P^a(\tau > n | S_n = j) &= \frac{P^a(\tau > n, S_n = j)}{P^a(S_n = j)} \\
&= \frac{P^a(\tau > n, S_n = j)}{P_0^a(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}} \\
&= \frac{W\, p^{1/2(n+j-a)} q^{1/2(n-j+a)}}{P_0^a(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}} \\
&= \frac{W\,(1/2)^n(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}}{P_0^a(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}} \\
&= \frac{P_0^{(a)}(\tau > n, S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}}{P_0^a(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}(q/p)^{a/2}} \\
&= \frac{P_0^{(a)}(\tau > n, S_n = j)}{P_0^a(S_n = j)} \\
&= P_0^a(\tau > n | S_n = j).
\end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos da una útil relación para poder llegar a la demostración de nuestro primer teorema.

Lema 4.3. *Para z y c en los enteros no negativos,cuando $z \to \infty$ y $\frac{c^2}{z} \to 0$*
$\frac{(z+c)!}{z^c z!} = 1 + \frac{c(c+1)}{2z} + o(\frac{c^2}{z})$.

Demostración. Para $c > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{(z+c)!}{z^c z!} &= \frac{z!(z+1)\cdots(z+c)}{z!z^c} \\
&= \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+c)}{z^c}.
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de logaritmo

$$\begin{aligned}
log(\frac{(z+c)!}{z^c z!}) &= log(\frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+c)}{z^c}) \\
&= log((z+1)(z+2)\cdots(z+c)) - log(z^c) \\
&= \sum_{j=i}^{c}(log(z+j) - log(z)) \\
&= \sum_{j=i}^{c} log(1+\frac{j}{z}).
\end{aligned}$$

Usando la expansión de Taylor de la función logaritmo alrededor del 1

$$\begin{aligned}
log(\frac{(z+c)!}{z^c z!}) &= \sum_{j=i}^{c} log(1+\frac{j}{z}) \\
&= \sum_{j=i}^{c}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\frac{j^i}{z} \\
&= \sum_{j=1}^{c}(\frac{j}{z} + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\frac{j^i}{z}) \\
&= \sum_{j=1}^{c}(\frac{j}{z} + o(\frac{j}{z})) \\
&= \sum_{j=1}^{c}\frac{j}{z} + \sum_{j=1}^{c} o(\frac{j}{z}) \\
&= \frac{c(c+1)}{2z} + o(\frac{c(c+1)}{z}).
\end{aligned}$$

Como $\frac{c^2}{z} \to 0$ y $c(c+1) \leq 2c^2$ usando la identidad $e^{\epsilon} = 1 + \epsilon + o(\epsilon)$ cuando $\epsilon \to 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(z+c)!}{z^c z!} &= e^{\frac{c(c+1)}{2z} + o(\frac{c(c+1)}{z})} \\
&\sim 1 + \frac{c(c+1)}{2z} + o(\frac{c(c+1)}{z}) + o(\frac{c(c+1)}{2z}) \\
&= 1 + \frac{c(c+1)}{2z} + o(\frac{c^2}{z})
\end{aligned}$$

El caso $c < 0$ es similar.

□

Después de los pasados lemas tenemos lo necesario para demostrar el primer teorema de la sección.

Teorema 4.4. *Para $a \geq 0$ fijo y $j = j(n) \geq 0$,*

$$P^a(\tau > n | S_n = j) \sim \frac{2(j+1)(a+1)}{n},$$

cuando $n \to \infty$, con $j + n - a$ par y $\lim_{n\to\infty} j(n)^2/n \to 0$.

Demostración. Notemos que $S_\tau = -1$ y $P_0^{(a)}(X = 1) = P_0^{(a)}(X = -1) = 1/2$. Definamos al tiempo de paro τ_1 como $\tau_1 = \text{mín}\{n \geq 1 : S_n < 1\}$.

Por el Lema (1.7)

$P_0^{(a)}(\tau > n, S_n = j) = P_0^{(a+1)}(\tau_1 > n, S_n = j{+}1) = P_0^{(a+1)}(S_1 \neq 0, \ldots, S_n \neq 0, S_n = j{+}1)$, y por el Principio de reflexión (1.16) y la simetría bajo P_0

$$\begin{aligned}
P_0^{(a+1)}(S_1 \neq 0, \ldots, S_n \neq 0, S_n = j+1) &= N_n^0(a+1, j+1)(1/2)^n \\
&= N_n(-a-1, j+1)(1/2)^n \\
&= P_0^{(-a-1)}(S_n = j+1) \\
&= P_0(S_n = j+1+a+1) \\
&= P_0(S_n = j+a+2) \\
&= P_0(S_n = -j-a-2) \\
&= P_0^{(a)}(S_n = -j-2) \\
&= P_0(S_n = -j-a-2) \\
&= P_0^{(a)}(S_n = -j-2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por lo tanto} \qquad & P_0^{(a)}(\tau > n, S_n = j) = P_0^{(a)}(S_n = -j-2) \\
\text{entonces } P_0^{(a)}(\tau > n | S_n = j) &= \frac{P_0^{(a)}(\tau > n, S_n = j)}{P_0^{(a)}(S_n = j)} \\
&= \frac{P_0^{(a)}(S_n = -j-2)}{P_0^{(a)}(S_n = j)}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema (1.13)

$$\begin{aligned}
P_0^{(a)}(\tau > n | S_n = j) &= \frac{P_0^{(a)}(S_n = -j-2)}{P_0^{(a)}(S_n = j)} \\
&= \frac{\binom{n}{1/2(n-2-j-a)}(1/2)^n}{\binom{n}{1/2(n+j-a)}(1/2)^n} \\
&= \frac{\binom{n}{1/2(n-2-j-a)}}{\binom{n}{1/2(n+j-a)}} \\
&= \frac{(n-1/2(n+j-a))!(1/2(n+j-a))!}{(n-1/2(n-2-j-a))!(1/2(n-2-j-a))!} \\
&= \frac{(\frac{n-j+a}{2})!(\frac{n+j-a}{2})!}{(\frac{n+2+j+a}{2})!(\frac{n-2-j-a}{2})!},
\end{aligned}$$

por el Lema (4.3) y con

$c_1 = \dfrac{j-a}{2}$, $c_2 = \dfrac{-2-j-a}{2}$ y $z = \dfrac{n}{2}$ y como $j^2/n \to 0$ entonces $c_1^2/n \to 0$ y $c_2^2/n \to 0$.

$$
\begin{aligned}
P_0^{(a)}(\tau < n|S_n = j) &= 1 - P_0^{(a)}(\tau > n|S_n = j) \\
&= 1 - \frac{(\frac{n-j+a}{2})!(\frac{n+j-a}{2})!}{(\frac{n+2+j+a}{2})!(\frac{n-2-j-a}{2})!} \\
&= 1 - \frac{\dfrac{(\frac{n-j+a}{2})!(\frac{n+j-a}{2})!}{(n/2)!(n/2)^{\frac{-j-a}{2}}(n/2)!(n/2)^{\frac{j-a}{2}}}}{\dfrac{(\frac{n+2+j+a}{2})!(\frac{n-2-j-a}{2})!}{(n/2)!(n/2)^{\frac{-j-a-2}{2}}(n/2)!(n/2)^{\frac{j+a+2}{2}}}} \\
&\sim 1 - \frac{(1 + \frac{c_1(1+c_1)}{n})(1 - \frac{c_1(1-c_1)}{n})}{(1 + \frac{c_2(c_2+1)}{n})(1 - \frac{c_2(1-c_2)}{n})} \\
&= \frac{\frac{1}{n^2}(n + c_2 + {c_2}^2)(n + c_2 - {c_2}^2) - \frac{1}{n^2}(n + {c_1}^2 + c_1)(n + {c_1}^2 - c_1)}{\frac{1}{n^2}(n + {c_2}^2 + c_2)(n + {c_2}^2 - c_2)} \\
&= \frac{(n^2 + 2n{c_2}^2 + {c_2}^4 - {c_2}^2) - (n^2 + 2n{c_1}^2 + {c_1}^4 - {c_1}^2)}{n^2 + 2n{c_2}^2 + {c_2}^4 - {c_2}^2} \\
&= \frac{({c_2}^2 - {c_1}^2)(2n - 1 + {c_2}^2 + {c_1}^2)}{n^2 + 2n{c_2}^2 + {c_2}^4 - {c_2}^2}.
\end{aligned}
$$

Además ${c_2}^2 - {c_1}^2 = 4(j+1)(a+1)$, por lo que

$$
\begin{aligned}
&= \frac{({c_2}^2 - {c_1}^2)(2n - 1 + {c_2}^2 + {c_1}^2)}{n^2 + 2n{c_2}^2 + {c_2}^4 - {c_2}^2} \\
&= \frac{8n(j+1)(a+1) + 4(a+1)(j+1)({c_2}^2 + {c_1}^2 - 1)}{n^2 + 2n{c_2}^2{c_2}^4 - {c_2}^2} \\
&= \frac{4(j+1)(a+1) + \frac{2(a+1)(j+1)({c_2}^2+{c_1}^2-1)}{n}}{\frac{n}{2} + {c_2}^2(1 + \frac{{c_2}^2-1}{n})} \\
&= \frac{4(j+1)(a+1)(1 + \frac{{c_2}^2+{c_1}^2-1}{n})}{\frac{n}{2} + {c_2}^2(1 + \frac{{c_2}^2-1}{n})} \\
&\sim \frac{4(j+1)(a+1)}{\frac{n}{2} + {c_2}^2}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{4(j+1)(a+1)}{n/2+{c_2}^2}}{\dfrac{4(j+1)(a+1)}{n/2}} &= \frac{n/2}{n/2+{c_2}^2} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{2{c_2}^2}{n}} \to 1,
\end{aligned}
$$

Entonces
$$
\frac{4(j+1)(a+1)}{\dfrac{n}{2}+{c_2}^2} \sim \frac{2(j+1)(a+1)}{n}.
$$

□

Queremos ver que las distribuciones finito dimensionales de una caminata aleatoria condicionada a ser positiva tienden a las distribuciones finito dimensionales de un proceso de Markov $\{Y_n\}$ estacionario con probabiliades de transición

$$
\mathbb{P}(Y_{n+1}=y_{n+1}|Y_n) = \frac{1}{2}\frac{Y_n+2}{Y_n+1} = 1-\mathbb{P}(Y_n+1|Y_n)
$$

Para poder demostrarlo nos hacen falta los siguientes lemas. El primero de ellos nos da una nueva relación entre P y P_0.

Lema 4.5. *Para P y P_0 como las definimos anteriormente se tiene que $P(S_n=j)=P_0(S_n=j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}$.*

Demostración. Por el Lema (1.13) y reagrupando adecuadamente

$$
\begin{aligned}
P(S_n=j) &= \binom{n}{\frac{n+j}{2}} p^{(\frac{n+j}{2})} q^{(\frac{n-j}{2})} \\
&= \binom{n}{\frac{n+j}{2}} (1/2)^n 4^{n/2} p^{(\frac{n+j}{2})} q^{(\frac{n-j}{2})} \\
&= \binom{n}{\frac{n+j}{2}} (1/2)^n (4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2} \\
&= P_0(S_n=j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 4.6. *Sea $B = (y_1, \ldots, y_k)$ un camino. Entonces*

$P((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n | S_n = j) = P_0((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n | S_n = j)$

Demostración. Sea N el número de caminos en los cuales $S_0 = 0, S_1 = y_1, \ldots, S_k = y_k, S_n = j$ y $S_i \neq 0 \; \forall \; 0 < i \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}
P((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n, S_n = j) &= P(S_1 = y_1, \ldots, S_k = y_k, S_1 \neq 0, \ldots, S_k \neq 0, \ldots, S_n \neq 0, S_n = j) \\
&= Np^{(\frac{n+j}{2})} q^{(\frac{n-j}{2})} \\
&= Np^{(\frac{n+j}{2})} q^{(\frac{n-j}{2})} (1/2)^n 4^{n/2} \\
&= N(4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2} \\
&= P_0(S_1 = y_1, \ldots, S_k = y_k, S_1 \neq 0, \ldots, S_k \neq 0, \ldots, S_n \neq 0, S_n = j) \\
&\times (4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2} \\
&= P_0((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n, S_n = j)(4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2}.
\end{aligned}$$

Por el Lema (4.5)

$$\begin{aligned}
P((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n | S_n = j) &= \frac{P((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n S_n = j)}{P(S_n = j)} \\
&= \frac{P_0((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n, S_n = j)(4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2}}{P_0(S_n = j)(4pq)^{n/2} (p/q)^{j/2}} \\
&= \frac{P_0((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n, S_n = j)}{P_0(S_n = j)} \\
&= P_0((S_0, \ldots, S_n) \in B, \tau > n | S_n = j).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.7. *Se tiene que cuando $n \to \infty$, $|j| = o(\sqrt{n})$ y $n - j$ par.*

$$P_0(S_n = j) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.$$

Demostración. Por el teorema de límite central de De Moivre Laplace para la distribución binomial [6]

$$\mathbb{P}(n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2/2npq} \tag{4.2}$$

por (4.2), el Lema (1.13) y teniendo en cuenta que $j^2/n \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_0(S_n = j) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{\frac{n+j}{2}} 1/2^{(\frac{n+j}{2})} 1/2^{(\frac{n-j}{2})} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{2}{n}(\frac{n+j}{2})-\frac{n}{2})^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{2}{n}((\frac{j}{2})^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-(\frac{j^2}{2n})} \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}
\end{aligned}$$

□

Demostremos finalmente que las probabilidades finito dimensionales de una caminata aleatoria condicionada a ser positiva tienden a las del proceso $\{Y_n\}$, un proceso de Markov con probabilidades de transición

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n) = \frac{1}{2}\frac{Y_n + 2}{Y_n + 1} = 1 - \mathbb{P}(Y_n + 1|Y_n)$$

.

Teorema 4.8. *Para todo $B \subset \mathbb{Z}^k$*

$$\lim_{n\to\infty} P[(S_1, ..., S_k) \in B|A_n] = P[(Y_1, \dots, Y_k) \in B].$$

Demostración. Sean $y_1, \dots, y_k$ enteros no negativos con $y_1 = 1$ y $|y_{i+1} - y_i| = 1$ para $1 \le i \le k-1$ y sea $B = \{S_1 = y_1, \dots, S_k = y_k\}$. Por los Lemas (4.5) y (4.6) y usando la definición de probabilidad condicional tenemos que

$$\begin{aligned}
P(B,\tau>n,S_n=j) &= P(B,\tau>n|S_n=j)\,P(S_n=j)\\
&= P_0(B,\tau>n|S_n=j)P_0(S_n=j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
&= P_0(B,\tau>n,S_n=j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
&= P_0(\tau>n,S_n=j|B)P_0(B)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}.
\end{aligned}$$

Notemos que la probabilidad de B para una caminata simple simétrica que empieza en 0 está dada por $P_0(S_k=y_k,S_{k-1}=y_{k-1},\dots,S_2=S_1=y_1)$, la cual equivale a
$P_0(S_k-S_{k-1}=y_k-y_{k-1},\dots,S_2-S_1=y_2-y_1,S_1=y_1)=P_0(X_1=y_1,X_2=y_2-y_1,\dots,X_k=y_k-y_{k-1})$
Debido a la independencia de las variables de salto, a que $|y_{i+1}-y_i|=1$ y a que bajo P_0, $P_0(X_i=1)=1/2=P_0(X_i=-1)$,
$P_0(S_k-S_{k-1}=y_k-y_{k-1},\dots,S_2-S_1=y_2-y_1,S_1=y_1)=P_0(X_1=y_1)P_0(X_2=y_2-y_1)\cdots P_0(X_k=y_k-y_{k-1})=2^{-k}$, por lo que usando la propiedad de Markov y la homogeneidad en el tiempo y en el espacio de las caminatas aleatorias

$$\begin{aligned}
&P_0(\tau>n,S_n=j|B)P_0(B)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
=\;&2^{-k}P_0(\tau>n,S_n=j|S_1=y_1,\dots,S_k=y)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
=\;&2^{-k}P_0(\tau>n,S_n=j|S_k=y)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
=\;&2^{-k}P_0^{(y)}(\tau>n-k,S_{n-k}=j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
=\;&2^{-k}P_0^{(y)}(\tau>n-k|S_{n-k}=j)P_0^{(y)}(S_{n-k}=j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}\\
=\;&2^{-k}P_0^{(y)}(\tau>n-k|S_{n-k}=j)P_0(S_{n-k}=j-y)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $P(B,\tau>n,S_n=j)=2^{-k}P_0^{(y)}(\tau>n-k|S_{n-k}=j)P_0(S_{n-k}=j-y)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}$
Debido a ésta última igualdad, si multiplicamos de ambos lados por $\dfrac{n^{3/2}}{(4pq)^{n/2}}$ y sumamos sobre todos los posibles valores de j tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{n^{3/2}P(B,\tau>n)}{(4pq)^{n/2}} &= \sum_{j\geq 0,n-j par}\frac{n^{3/2}P(B,\tau>n,S_n=j)}{(4pq)^{n/2}}\\
&= \sum_{j\geq 0,n-j par} n^{3/2}2^{-k}(p/q)^{j/2}P_0^{(y)}(\tau>n-k|S_{n-k}=j)P_0(S_{n-k}=j-y)\\
&= \sum_{j\geq 0,n-j par} 2^{-k}(p/q)^{j/2}nP_0^{(y)}(\tau>n-k|S_{n-k}=j)\sqrt{n}P_0(S_{n-k}=j-y).
\end{aligned}$$

Para $j\leq n^{1/4}$ se tiene que $|j|\in o(\sqrt{n})$ y tenemos como hipótesis que $j^2/n\to 0$ cuando $n\to\infty$, debido a esto, por el Lema 4.7 y el Teorema4.4

$$2^{-k}(p/q)^{j/2}nP_0^{(y)}(\tau>n-k|S_{n-k}=j)\sqrt{n}P_0(S_{n-k}=j-y) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &\sim \quad 2^{-k}(p/q)^{j/2} n^{3/2} \frac{2(j+1)(y+1)}{n} \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \\ &= \quad 2^{-k}(p/q)^{j/2} 2(j+1)(y+1) \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\sum_{j \leq n^{1/4}, n-j\, par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0^{(y)}(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_{n-k} = j-y) \tag{4.4}$$

$$\sim \sum_{j \leq n^{1/4}, n-j\, par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} 2(j+1)(y+1) \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Para $j > n^{1/4}$, por ser $P_0^{(y)}$ y P_0 medidas de probabilidad, podemos acotar

$$2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0^{(y)}(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_{n-k} = j-y) \leq 2^{-k}(p/q)^{j/2} n^{3/2}.$$

Como $p/q < 1$ tenemos que $\sum_{j \geq 0} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n^{3/2}$ converge y también lo hace la serie

$$\sum_{j \geq 0, n-j par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0^{(y)}(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_{n-k} = j-y).$$

Por lo que las colas de esta última serie tienden a 0, y entonces

$$\sum_{j > n^{1/4}, n-j par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_n - k = j-y) \to 0$$

De este último límite y de (4.4) tenemos que

$$\frac{n^{3/2} P(B, \tau > n)}{(4pq)^{n/2}} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j \geq 0, (n-j) par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0^{(y)}(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_{n-k} = j-y) \\ &= \sum_{j \leq n^{1/4}, (n-j) par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0^{(y)}(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_{n-k} = j-y) \\ &+ \sum_{j > n^{1/4}, (n-j) par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} n P_0^{(y)}(\tau > n-k | S_{n-k} = j) \sqrt{n} P_0(S_{n-k} = j-y) \\ &\longrightarrow \sum_{j \leq n^{1/4}, (n-j)\, par} 2^{-k}(p/q)^{j/2} 2(j+1)(y+1) \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \text{ cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

Por otro lado, por el Lema 4.5,

$$\begin{aligned} P(\tau > n, S_n = j) &= P(\tau > n | S_n = j) P(S_n = j) \\ &= P_0(\tau > n | S_n = j) P_0(S_n = j)(4pq)^{n/2}(p/q)^{j/2}, \end{aligned}$$

multiplicando por $\dfrac{n^{3/2}}{(4pq)^{n/2}}$ y sumando sobre los posibles valores de j

$$\sum_{j\geq 0,(n-j)par} n^{3/2}\frac{P(\tau > n, S_n = j)}{(4pq)^{n/2}} = \sum_{j\geq 0,(n-j)par} (p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n|S_n = j)\sqrt{n} P_0(S_n = j)$$

por lo que

$$\frac{n^{3/2}P(\tau > n)}{(4pq)^{n/2}} = \sum_{j\geq 0,(n-j)par} (p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n|S_n = j)\sqrt{n} P_0(S_n = j).$$

Al igual que en (4.4) cuando $j \leq n^{1/4}$, por el Teorema 4.4 y el Lema 4.7 se tiene que,

$$(p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n|S_n = j)\sqrt{n} P_0(S_n = j) \sim (p/q)^{j/2} 2(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

por lo tanto $\displaystyle\sum_{j\leq n^{1/4},(n-j)par} n^{3/2}\frac{P(\tau > n, S_n = j)}{(4pq)^{n/2}} \sim \sum_{j\geq n^{1/4},(n-j)par} (p/q)^{j/2} 2(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$

Para $j > n^{1/4}$ por ser P_0 una medida de probabilidad

$$(p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n|S_n = j)\sqrt{n} P_0(S_n = j) \leq (p/q)^{j/2} n^{3/2}.$$

Como $p/q < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{j\geq 0} (p/q)^{j/2} n^{3/2}$ converge y por lo tanto, también lo hace

$$\sum_{j\geq 0} (p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n|S_n = j)\sqrt{n} P_0(S_n = j).$$

De aquí se sigue que

$$\sum_{j > n^{1/4}} (p/q)^{j/2} n P_0(\tau > n|S_n = j)\sqrt{n} P_0(S_n = j) \leq (p/q)^{j/2} n^{3/2} \longrightarrow 0$$

Así

$$\frac{n^{3/2}P(\tau > n)}{(4pq)^{n/2}} - \sum_{(n-j)par,j\geq 0} (p/q)^{j/2} 2(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \to 0 \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) tenemos que

$$\begin{aligned}
P(B|\tau > n) &= \frac{P(B, \tau > n)}{P(\tau > n)} \\
&\to \frac{\sum_{(n-j)par, j\geq 0} 2^{-k}(p/q)^{j/2} 2(y+1)(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sum_{(n-j)par, j\geq 0} (p/q)^{j/2} 2(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \\
&= \frac{2^{-k}(y+1) \sum_{(n-j)par, j\geq 0} (p/q)^{j/2} 2(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sum_{(n-j)par, j\geq 0} (p/q)^{j/2} 2(j+1)\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \\
&= 2^{-k}(y+1).
\end{aligned}$$

Luego $P(S_1 = y_1, \ldots, S_k = y|\tau > n) \to 2^{-k}(y+1)$.
Si $\{Y_n\}$ es un proceso para el cual

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_k = y) &= \lim_{n\to\infty} P(S_1 = y_1, \ldots, S_k = y|\tau > n) \\
&= 2^{-k}(y+1)
\end{aligned}$$

entonces,

$$P(Y_{k+1} = y_k + 1|Y_1 = y_1, \ldots, Y_k = y_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_{k+1} = y_k + 1)}{P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_k = y_k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{P((S_1 = y_1, \ldots, S_{k+1} = y_k + 1)|\tau > n)}{P(S_1 = y_1, \ldots, S_k = y_k|\tau > n)} \\
&= \frac{(Y_k + 2)2^{-k-1}}{(Y_k + 1)2^{-k}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Y_k + 2}{Y_k + 1}.
\end{aligned}$$

(4.8)

Por lo tanto $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | Y_1, \ldots, Y_n) = \frac{1}{2} \dfrac{Y_n + 2}{Y_n + 1}$. $\square$

De esta manera Keener construye una caminata aleatoria condicionada a ser positiva. Más adelante veremos otra construcción para caminatas aleatorias más generales.

Capítulo 5

Construcción de Tanaka para las trayectorias de una caminata aleatoria condicionada a ser positiva.

En este último capítulo veremos la construcción que hace Tanaka en [11] para las trayectorias de una caminata aleatoria condicionada a ser positiva. Usaremos para ello los procesos de escalera y algunas propiedades de estos procesos que vimos en el capítulo anterior.
En la primera sección definiremos al proceso $\{W_n\}$ que consistirá en pegar una a una las trayectorias, recorridas en sentido contrario entre dos puntos de escalera decrecientes consecutivos. En la segunda sección demostraremos para una caminata aleatoria con distribución discreta, que el proceso $\{W_n\}$ tiene a $\hat{h}_\xi$ (definida más adelante), como función de transición. Para terminar el capítulo veremos la construcción de Tanaka para algunas caminatas aleatorias con distribuciones de salto específicas. Veremos que para la caminata aleatoria simple simétrica, ésta coincide con la construcción que vimos de Keener [8] en el tercer capítulo de esta tesis.

5.1. Construcción del proceso $\{W_n\}$.

Sea $\{S_n\}$ una caminata aleatoria que empieza en cero y pensemos en el tiempo en el cual $\{S_n\}$ entra por primera vez en la parte negativa del plano. Supongamos que el tiempo de esta entrada a $(-\infty, 0)$ es finito casi seguramente, es decir, T_1^- no es defectiva, esto es:

$$\mathbb{P}(T_1^- < \infty) = 1.$$

Recordemos que T_1^- es el primer tiempo de escalera decreciente y se define como $T_1^- = \{r > 0 : S_r < 0\}$.

El camino que sigue la caminata aleatoria $\{S_n\}$ hasta el primer momento en que ésta se vuelve negativa está dada por $(0, S_1, S_2, \ldots, S_{T_1^-})$. Si pensamos en una partícula que sigue este camino pero con el tiempo invertido, ésta estaría al momento inicial de su recorrido en el punto $(0, S_{T_1^-})$ y al primer paso se encontraría en el punto $(1, S_{T_1^- -1})$ y así sucesivamente hasta llegar al punto $(T_1^-, 0)$. Es decir la partícula seguiría el camino $(S_{T_1^-}, S_{T_1^- -1}, S_{T_1^- -2}, \ldots, S_1, 0)$. Para la construcción del proceso $\{W_n\}$ que haremos más adelante usaremos este camino pero trasladado $S_{T_1^-}$ unidades hacia arriba. Para ello definimos las siguientes dos transformaciones para las secciones de un camino.

Definición 5.1. *Sea $R(j,k)$, con $j < k$ tal que*

$$R(j,k)(y_j, y_{j+1}, \ldots, y_k) = (y_k, y_{k-1}, \ldots, y_j), \text{ para } y_j, y_{j+1}, \ldots, y_k \in \mathbb{R}.$$

Sea también $V(a)(y_j, y_{j+1}, \ldots, y_k)$, para $a, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$, definida como

$$V(a)(y_j, y_{j+1}, \ldots, y_k) = (a + y_j, a + y_{j+1}, \ldots, a + y_k).$$

$R(T_1, T_2)$ y $V(Y)$ se definen análogamente para T_1 y T_2 tiempos de paro y Y una variable aleatoria.

Así el camino inverso y trasladado de $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$, es la composición de R con T, aplicada a $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$:

$$V(-S_{T_1^-}) \circ R(0, T_1^-)(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-}) = (0, S_{T_1^- -1} - S_{T_1^-}, \ldots, S_1 - S_{T_1^-}, -S_{T_1^-}).$$

A la sección resultante de aplicar la transformación $V \circ R$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ la llamaremos la sección invertida trasladada de $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Para abreviar un poco la notación denotaremos por R a la sección invertida trasladada de $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$. R también puede ser escrita como
$(0, -X_{T_1^-}, -X_{T_1^-} - X_{T_1^- -1}, -X_{T_1^-} - X_{T_1^- -1} - X_{T_1^- -2}, \ldots, -X_{T_1^-} - X_{T_1^- -1} - \cdots - X_1)$.
Las variables de salto que determinan este camino son las mismas que determinan el camino $(0, S_1, S_2, \ldots, S_{T_1^-})$ pero con signo contrario y además el orden en el que cada uno de estos dos caminos está determinado por estas variables es el contrario.

Como ya hemos visto, en el capítulo anterior los puntos de escalera decrecientes (T_k^-, H_k^-) forman un proceso de renovación bivariado, por lo que la sección de la caminata aleatoria después del primer tiempo de escalera es una

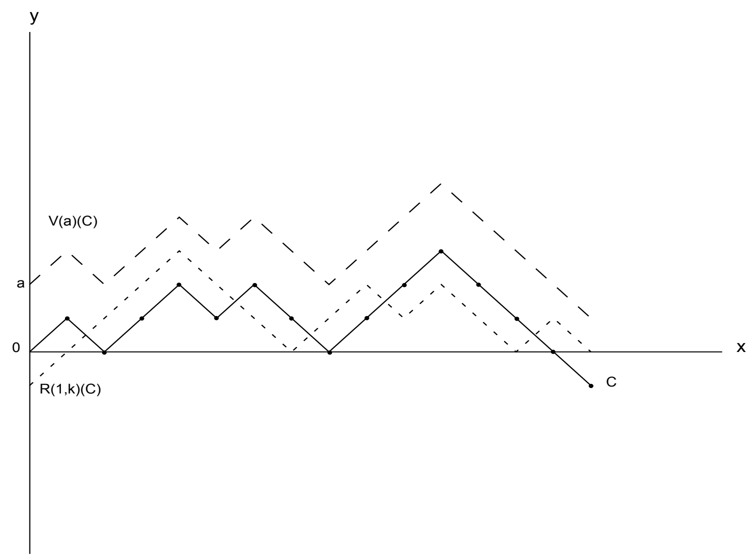

Figura 5.1: La sección de un camino $C = (y_1, \ldots, y_k)$ y las transformaciones $R(1,k)(C)$ y $V(a)(C)$ aplicadas a éste.

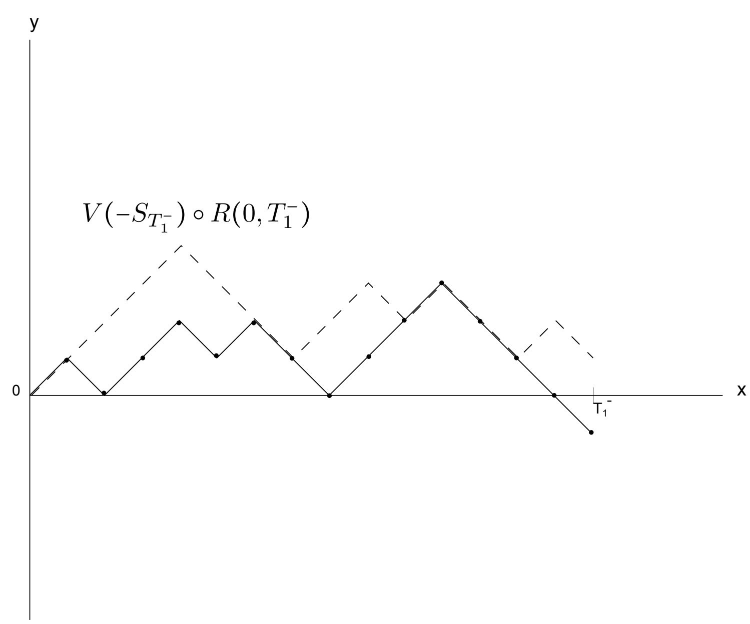

Figura 5.2: $(0, S_1, S_2, \ldots, S_{T_1^-})$ y $V(-S_{T_1^-}) \circ R(0, T_1^-)(0, S_1, S_2, \ldots, S_{T_1^-})$

réplica probabilística de toda la caminata aleatoria, y el segundo punto de escalera de la caminata original corresponde con el primer punto de escalera de esta copia. Por ello $(0, S_{T_2^- -1} - S_{T_2^-}, S_{T_2^- -2} - S_{T_2^-}, \ldots, S_{T_1^-} - S_{T_2^-})$ es una copia de $(0, S_{T_1^- -1} - S_{T_1^-}, S_{T_1^- -2} - S_{T_1^-}, \ldots, S_1 - S_{T_1^-}, -S_{T_1^-})$. Lo mismo sucede para todo punto de escalera (T_k^-, H_k^-). La sección de la caminata aleatoria entre dos puntos de escalera consecutivos y trasladada al orígen, es una copia independiente de $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$. También, las secciones recorridas en sentido contrario y trasladadas a $(0,0)$ entre dos puntos de escalera decrecientes consecutivos, son copias de $R = (0, S_{T_1^- -1} - T_1^-, \ldots, S_1 - S_{T_1^-}, -S_{T_1^-})$.

Notemos que $S_{T_1^-} < 0$, por lo que $-S_{T_1^-} > 0$, además $S_{T_1^- -k} \geq 0$, por lo que $S_{T_1^- -k} - S_{T_1^-} \geq -S_{T_1^-}$ para $1 \leq k \leq T_1^-$. De lo cual tenemos que R toma sus valores en el conjunto

$$\mathcal{W} = \bigcup_l \mathcal{W}_l, \text{ donde}$$

$$\mathcal{W}_l = \{\mathbf{w} = (w(0), w(1), \ldots, w(l)) : w(0) = 0, \text{ y } 0 < w(l) = \min_{1 \leq k \leq l} w(k)\}.$$

Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \cdots \in \mathcal{W}$ copias independientes de R. Con base en estas copias $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots$, con $\mathbf{w}_k = (w_k(0), w_k(1), \ldots, w_k(l_k))$,
$k = 1, 2, \ldots$, definiremos al proceso $\{W_n\}$. Este proceso consistirá en aplicar para $k = 1, 2, \ldots$, la función $V(T_k^-) \circ R(T_{k-1}^-, T_k^-)$ a cada una de las secciones entre dos puntos consecutivos de escalera decrecientes de la caminata aleatoria $\{S_n\}$, T_{k-1}^- y T_k^- y pegar cada una de las secciones transformadas. Construido de esta manera, el proceso $\{W_n\}$ primero recorre la sección de la caminata aleatoria que va de T_1^- a 0 y luego a partir de ese punto recorre la sección inversa que comprende del segundo al primer tiempo de escalera decreciente, empezando por T_2^- y terminando en T_1^-, y así sucesivamente. Figura(5.3).

Notemos que en el camino $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$ la caminata aleatoria baja más de lo que sube, pues en este camino la posición final está en la parte negativa del plano, por lo que su camino inverso, sube más de lo que baja debido a que éste consiste en cambiar el sentido de los saltos de $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$. Por lo tanto, para el camino $(0, S_{T_1^- -1} - S_{T_1^-}, \ldots, -S_{T_1^-})$ se tiene que $-S_{T_1^-} \geq 0$ y por ser $-S_{T_1^-} = \min_{0 \leq k \leq T_1^-} S_{T_1^- -k} - S_{T_1^-}$ resulta que $S_{T_1^- -k} \geq 0$. Entonces tenemos que todo punto en el camino R tiene una altura positiva. Por lo que al pegar las trayectorias $w_1, w_2, \ldots$ todos los puntos tienen un altura positiva y $\{W_n\}$ resulta ser un proceso que toma valores en $[0, \infty)$.

Como ya hemos dicho el proceso $\{W_n\}$ consiste en invertir, trasladar al orígen y pegar una a una las secciones entre dos puntos consecutivos de escalera decrecientes. Por ello, si trasladamos al punto $(0,0)$ cada uno de los caminos inversos entre dos puntos consecutivos de escalera decrecientes $(T_k^-, S_{T_k^-})$ y $(T_{k+1}^-, S_{T_{k+1}^-})$, estos deben coincidir con $\mathbf{w}_k = (w_k(0), w_k(1), \ldots, w_k(l_k))$. De esta manera definimos el proceso $\{W_n\}$ como:

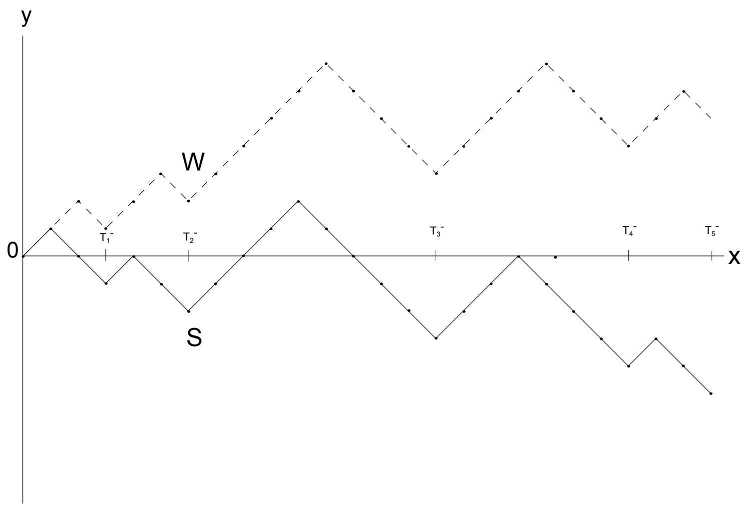

Figura 5.3: Trayectoria del proceso $\{W_n\}$

$$W_n = \begin{cases} w_1(n) & \text{para } 0 \le n \le T_1^-, \\ w_1(l_1) + w_2(n - T_1^-) & \text{para } T_1^- < n \le T_2^-, \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{k-1} w_j(l_j) + w_k(n - T_{k-1}^-) & \text{para } T_{k-1}^- < n \le T_k^-, \\ \vdots & \end{cases}$$

Esto también podemos escribirlo respecto a las alturas decrecientes de escalera y a las variables de salto como:

$$W_0 = 0, \ W_n = -H_k^- - \sum_{j=T_{k+1}+T_{k+1-n}}^{T_{k+1}} X_j,$$

para $T_k < n \le T_{k+1}$.

Ya que hemos definido al proceso $\{W_n\}$ veremos que este tiene como función de transición a $\hat{h}_\xi$, la cual se define como

$$\hat{h}_\xi(x, dy) = \frac{\xi(y)}{\xi(x)} \mathbb{P}(x - X_1 \in dy) \mathbb{1}_{(0,\infty)(y)}$$

donde $\xi(x)$ está dada por

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = 0 \\ \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{T_1^-} \mathbb{1}_{[0,x)}(S_n)\right) & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Esta función coincide con la función de renovación del proceso de escalera decreciente, pues por el Teorema 3.10s sabemos que la función de renovación asociada al proceso de escalera decreciente puede ser interpretada como la esperanza del número de veces que la caminata aleatoria está en el intervalo $[0,x)$ antes de ser negativa por primera vez.

Para ver que $\{W_n\}$ es un proceso que tiene como función de transición a $\hat{h}_\xi$, veremos que esta función es realmente una función de transición[1]. Para ello enunciamos primero el siguiente lema.

Lema 5.2. *Para* $A \in \mathcal{B}[0,\infty)$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{T_1^-} \mathbb{1}_A(S_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in A)$$

Demostración. Cambiando los límites de la suma en la segunda igualdad y usando el lema de convergencia monótona en la tercerca igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{T_1^-} \mathbb{1}_A(S_n)) &= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_A(S_n)\mathbb{1}_{\{T_1^-=k\}}) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_A(S_n)\mathbb{1}_{\{T_1^-=k\}}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{1}_A(S_n)\mathbb{1}_{\{T_1^-=k\}}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(S_n)\mathbb{1}_{\{T_1^-=n+1\}}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T_1^- = n+1, S_n \in A). \end{aligned}$$

□

Ahora regresaremos a demostrar que la función $\hat{h}_\xi(x,dy)$ es función de transición.

[1]Véase Apéndice de Cadenas de Markov.

Lema 5.3. $\int_{(0,\infty)} \hat{h}_\xi(x,dy) = 1$

Demostración. Para $x \in \mathbb{R}$ escribimos $S_n^x = x + S_n$ y sea $T_1^{-x} = \text{ínf}\{n \geq 1 : S_n^x < 0\}$, $x \geq 0$. Definimos para $x \geq 0$ y $A \in \mathcal{B}[0,\infty)$ a

$$G(x,A) = \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{T_1^{-x}} \mathbb{1}_A(S_n^x)).$$

Notemos que $G(0,[0,x)) = \xi(x)$. También definimos a las funciones de transición $p(x,dy) = \mathbb{P}(x + X_1 \in dy)$, $\hat{p}(x,dy) = \mathbb{P}(x - X_1 \in dy)$.
Ya que hemos definido todo lo necesario veremos primero que

$$\int_{[0,x)} G(0,dx)\mathbb{P}(-X_1 \in (x,\infty)) = 1 \tag{5.1}$$

Por hipótesis tenemos que $\mathbb{P}(T_1^- < \infty) = 1$.
Por otro lado usando el Lema 5.2

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,\infty)} G(0,dx)\mathbb{P}(-X_1 \in (x,\infty)) \\
= & \int_{[0,\infty)} G(0,dx)\mathbb{P}(x + X_1 < 0) \\
= & \int_{[0,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in dx)\mathbb{P}(x + X_1 < 0) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in dx)\mathbb{P}(x + X_1 < 0) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_n \geq 0, S_n \in dx)\mathbb{P}(x + X_1 < 0)
\end{aligned}$$

observemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_n \geq 0, S_n \in dx)\mathbb{P}(x + X_1 < 0) \\
= & \ \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \ldots, S_n \geq 0, S_{n+1} < 0) = \mathbb{P}(T_1^- = n+1),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_n \geq 0, S_n \in dx)\mathbb{P}(x + X_1 < 0) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- = n+1) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- = n) \\
= & \ 1
\end{aligned}$$

Por otro lado podemos escribir a $\xi(y) = \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{T_1^-} \mathbb{1}_{[0,y)}(S_n))$ como

$$\int_{[0,y)} \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{T_1^-} \mathbb{1}_{\{dz\}}(S_n)) = \int_{[0,y)} G(0,dz).$$

De esta última igualdad y cambiando los límites de integración:

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} \hat{p}(x,dy)\xi(y) &= \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}(x - X_1 \in dy) \int_{[0,y)} G(0,dz) \\ &= \int_{[0,\infty)} G(0,dz) \int_{(z,\infty)} \mathbb{P}(x - X_1 \in dy).\end{aligned}$$

Ya que $\mathbb{P}(x - X_1 \in (z,\infty)) = \mathbb{P}(-X_1 \in (z,\infty)) + \mathbb{P}(-X_1 \in (z-x,z])$, podemos escribir la última igualdad como:

$$\int_{[0,\infty)} G(0,dz)\mathbb{P}(-X_1 \in (z,\infty)) + \int_{[0,\infty)} G(0,dz)\mathbb{P}(-X_1 \in (z-x,z]).$$

Por (5.1) tenemos que el sumando del lado izquierdo es igual a 1, entonces:

$$\int_{[0,\infty)} \hat{p}(x,dy)\xi(y) = 1 + \int_{[0,\infty)} G(0,dz)\mathbb{P}(-X_1 \in (z-x,z]).$$

Si $x = 0$ la integral del lado derecho de la igualdad se anula y $\xi(0) = 1$, por lo que

$$\int_{(0,\infty)} \hat{P}_\xi(0,dy) = \int_{(0,\infty)} \hat{p}(0,dy)\xi(y) = 1.$$

Y si $x > 0$, entonces, por el Lema 5.2

$$\begin{aligned}&\int_{(0,\infty)} \hat{p}(x,dy)\xi(y) \\ = &\ 1 + \int_{[0,\infty)} G(0,dz)\mathbb{P}(-X_1 \in (z-x,z]) \\ = &\ 1 + \int_{[0,\infty)} G(0,dz)\mathbb{P}(z + X_1 \in [0,x)) \\ = &\ 1 + \int_{[0,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in dz)\mathbb{P}(z + X_1 \in [0,x)) \\ = &\ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in dz)\mathbb{P}(z + X_1 \in [0,x)),\end{aligned}$$

ahora observemos que

$$\int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in dz)\mathbb{P}(z + X_1 \in [0,x)) = \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} \in [0,x)),$$

por lo que

$$\begin{aligned}
& 1+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,\infty)}\mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_n \in dz)\mathbb{P}(z+X_1 \in [0,x)) \\
= \quad & 1+\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} \in [0,x)) \\
= \quad & 1+\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} \in [0,x)) \\
= \quad & \mathbb{P}(T_1^- \geq 0, S_0 \in [0,x)) + \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} \in [0,x)) \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T_1^- \geq n, S_n \in [0,x)) \\
= \quad & G(0,[0,x)) \\
= \quad & \xi(x),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{(0,\infty)}\hat{p}_\xi(x,dy) = \int_{(0,\infty)}\frac{\xi(y)}{\xi(x)}\hat{p}(x,dy) = 1.$$

□

Ahora veamos que la función $\hat{h}_\xi$ cumple las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Las definiciones y resultados que utilizaremos para demostrarlo pueden ser encontradas en el Apéndice de Cambios de tiempo.

Lema 5.4. *La función $\hat{h}_\xi$ cumple las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)}\hat{h}_\xi(x,dz)\hat{h}_\xi(z,dy) &= \int_{(0,\infty)}\frac{\xi(z)}{\xi(x)}\hat{p}(x,dz)\mathbb{1}_{\{z>0\}} * \frac{\xi(y)}{\xi(z)}\hat{p}(z,dy)\mathbb{1}_{\{y>0\}} \\
&= \frac{\xi(y)}{\xi(x)}\int_{(0,\infty)}\hat{p}(x,dz)\mathbb{1}_{\{z>0\}}\hat{p}(z,dy)\mathbb{1}_{\{y>0\}}.
\end{aligned}$$

Definimos al funcional aditivo asociado al proceso $\{S_n\}$, como el proceso $\{A_n, n \geq 0\}$ tal que :

$$A_0 = 0,\ A_n = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(S_i).$$

Para el funcional aditivo $\{A_n\}$ definimos el cambio de tiempo $\{C_k, k \geq 0\}$ tal que :

$$C_0 = 0,\ C_k = \text{ínf}\{m > 0 : \sum_{i=1}^{m}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(S_n)\}.$$

Definidos de esta manera, $\{C_k\}$ y $\{A_n\}$, el proceso $\{S_{C_k}\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{R}^-$ (ver Teorema ??) y función de transición $g(x,dy) = \mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}^-\}}p(x,dy)$.
Si una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}$ tiene a $f(x,dy)$ como función de transición, entonces la función $f^-(x,dy) = f(-x,-dy)$ definida en el conjunto $-\mathcal{E} = \{r \in \mathbb{R} : r = -s \text{ para algún } s \in \mathcal{E}\}$ es una función de transición en $-\mathcal{E}$, porque:

$$\begin{aligned} \int_{-\mathcal{E}} f^-(x,dy) &= \int_{\mathcal{E}} f(-x,-dy) \\ &= 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\mathcal{E}} f^-(x,dz)f^-(z,dy) &= \int_{\mathcal{E}} f(-x,-dz)f(-z,-dy) \\ &= f(-x,-dy) \\ &= f^-(x,dy) \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que la función $\hat{g}(x,dy) = g(-x,-dy) = \mathbb{1}_{\{-y\in\mathbb{R}^-\}}p(-x,-dy) = \mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}^+\}}\hat{p}(x,dy)$ es función de transición en $\mathbb{R}^+$, por lo que

$$\int_0^\infty \hat{p}(x,dz)\mathbb{1}_{\{z>0\}}\hat{p}(z,dy)\mathbb{1}_{\{y>0\}} = \hat{p}(x,dy)\mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

De aquí

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \hat{h}_\xi(x,dz)\hat{h}_\xi(z,dy) &= \frac{\xi(y)}{\xi(x)}\hat{p}(x,dy)1_{\{y>0\}} \\ &= \hat{h}_\xi(x,dy) \end{aligned}$$

De los dos lemas anteriores tenemos que:

Teorema 5.5. *$\hat{h}_\xi$ es función de transición de Markov en $[0,\infty)$.*

□

5.2. Caso especial en el que $\{S_n\}$ toma valores en los enteros.

Ya que sabemos que $\hat{h}_\xi$ es una función de transición, vamos a demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 5.6. *El proceso $\{W_n\}$ es una cadena de Markov con función de transición $\hat{h}_\xi$, que toma valores en $[0,\infty)$.*

Demostraremos esto para el caso en el que $\{S_n\}$ es una caminata aleatoria que toma valores en los números enteros. En este caso $\mathcal{W}$ consiste en todos los caminos $\mathbf{w} = (w(0),\dots,w(l)))$ donde $w(k) \in \mathbb{Z}$, $w(0) = 0$ y $0 < w(l) = \min_{1\le k\le l} w(k)$ con $l \ge 1$. Denotaremos por μ a a ley de probabilidad para $(0, S_{T_1^- -1} - S_{T_1^-}, \dots, S_1 - S_{T_1^-}, -S_{T_1^-})$, donde μ es una medida de probabilidad en $\mathcal{W}$. En este caso de caminatas aleatorias en los enteros, las probabilidades de transición para $\{S_n\}$ las escribiremos como $p(x,y) = \mathbb{P}(x + X_1 = y)$ y $\hat{p}(x,y) = p(y,x)$ para $x, y \in \mathbb{Z}$.

En el siguiente lema veremos que la probabilidad de que $R = (0, S_{T_1^- -1} - S_{T_1^-}, \dots, -S_{T_1^-})$ siga el camino $(0, a_1, a_2, \dots, a_l)$, es igual a la probabilidad de que la caminata aleatoria vaya de a_l a a_{l-1} en un paso, por la probabilidad de ir de a_{l-1} a a_{l-2} en un paso y así hasta la probabilidad de ir de a_1 a 0 en un paso.

Lema 5.7. *Si $a_1,\dots,a_l \in \mathbb{Z}, l \ge 1$ satisfacen que $\min_{1\le k\le l} a_k = a_l > 0$, entonces*

$$\mu(\mathbf{w} = ((0, a_1, a_2, \dots, a_l)) = \hat{p}(0,a_1)\hat{p}(a_1,a_2)\cdots\hat{p}(a_{l-1},a_l)$$

Demostración. Sea $\Gamma = \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} : T_1^- = l, S_{l-k} - S_l = a_k \text{ para } 1 \le k \le l\}$ y notemos que si $S_{l-k} - S_l = a_k$ para $1 \le k \le l$, entonces $S_{l-k} - S_l \ge -S_l > 0$ y $S_{l-k} > S_l$ para toda $k < l$. Por lo tanto l es un tiempo de escalera decreciente y además como $S_{l-k} \ge 0$, l no sólo es un tiempo de escalera si no que además es el primer tiempo de escalera. De esto podemos concluir que si $S_{l-k} - S_l = a_k$, para $1 \le k \le l$, entonces $T_1^- = l$, por lo que para toda $\mathbf{w} \in (\mathbf{w} \in \mathcal{W} : w(k) = a_k \text{ para } 1 \le k \le l)$, se tiene que $\mathbf{w} \in \Gamma$, y por tanto $\Gamma \subseteq (\mathbf{w} \in \mathcal{W} : w(k) = a_k \text{ para } 1 \le k \le l)$. Es evidente que $(\mathbf{w} \in \mathcal{W} : w(k) = a_k \text{ para } 1 \le k \le l) \subseteq \Gamma$. Entonces $\Gamma = (S_{l-k} - S_l = a_k \text{ para } 1 \le k \le l)$. Por lo tanto $\mu(\mathbf{w} \in \mathcal{W} : w(k) = a_k \text{ para } 1 \le k \le l) = \mathbb{P}(\Gamma)$. Por la independencia de las variables de salto tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Gamma) &= \mathbb{P}(T_1^- = l, S_{l-1} - S_l = a_1, S_{l-2} - S_l = a_2, \dots, S_1 - S_l = a_{l-1}, -S_l = a_l) \\
&= \mathbb{P}(T_1^- = l, -X_l = a_1, -X_{l-1} - X_l = a_2, \dots, -X_1.X_2 - \cdots - X_l = a_l) \\
&= \mathbb{P}(T_1^- = l, X_l = -a_1, X_{l-1} = a_1 - a_2, \dots, X_1 = a_{l-1} - a_l) \\
&= \mathbb{P}(X_l = -a_1, X_{l-1} = a_1 - a_2, \dots, X_1 = a_{l-1} - a_l) \\
&= \mathbb{P}(X_l = -a_1)\mathbb{P}(X_{l-1} = a_1 - a_2)\cdots\mathbb{P}(X_1 = a_{l-1} - a_l) \\
&= \mathbb{P}(a_1 + X_l = 0)\mathbb{P}(a_2 + X_{l-1} = a_1)\cdots\mathbb{P}(a_l + X_1 = a_{l-1}) \\
&= p(a_1,0)p(a_2,a_1)p(a_3,a_2)\cdots p(a_{l-1},a_{l-2})p(a_l,a_{l-1}) \\
&= \hat{p}(0,a_1)\hat{p}(a_1,a_2)\hat{p}(a_2,a_3)\cdots\hat{p}(a_{l-2},a_{l-1})\hat{p}(a_{l-1},a_l).
\end{aligned}$$

$\square$

Ya que conocemos la probabilidad de un camino en $\mathcal{W}$, usaremos ésto para encontrar la probabilidad de que R siga en sus primeros m pasos un camino dado $(0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, sin importar el valor que tome T_1^-. Sólo pediremos que $m \geq T_1^-$. Para ello definiremos una nueva función en $\mathcal{W}$ y un nuevo subconjunto de $\mathcal{W}$. Para $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ definimos la función $L(\mathbf{w}) = (w(0), w(1), \ldots, w(l)))$, como $L(\mathbf{w}) = l$. Y para enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_m, a$, al evento $\Lambda_n(a_1, a_2, \ldots, a_m; a)$ como el conjunto:

$$\{w \in \mathcal{W} : w(0) = 0, w(k) = a_k \; 1 \leq k \leq m, l(w) = m + n, w(m + n) = a\}.$$

Es decir no importará la trayectoria de $\{S_n\}$ para $n = 1, 2, \ldots, n$. Sólo va a ser importante la trayectoria desde el instante $n + 1$ hasta $n + m = l$. Es claro que $T_1^- = n + m$ y $S_{T_1^-} = -a$. Antes de conocer la probabilidad de que ésto suceda, es necesario definir nuevas funciones $g_a(x, y)$, $\hat{g}_a(x, y)$ y conocer algunas de sus propiedades.

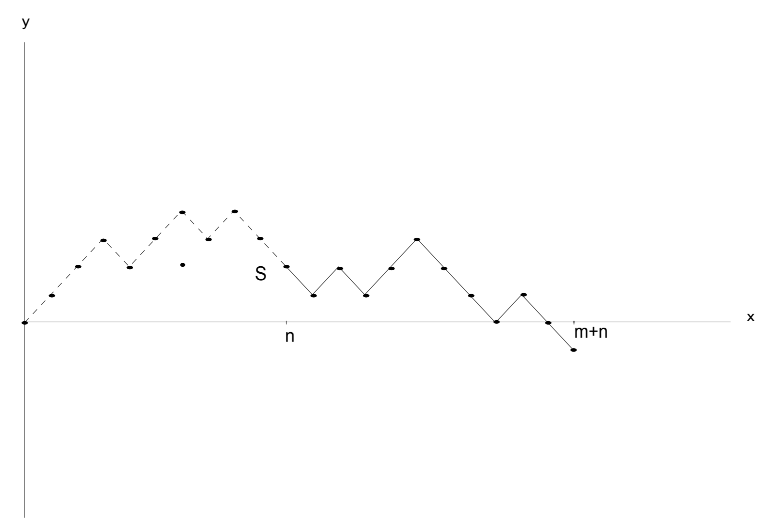

Figura 5.4: Últimos m pasos de S.

Sean $g_a(x, y)$ y $\hat{g}_a(x, y)$ definidas como:

$$\begin{aligned} g_a(x, y) &= \delta_{x,y} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0 = x \\ x_1, \ldots, x_n \geq a}} p(x_0, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_n, y) \\ \hat{g}_a(x, y) &= \delta_{x,y} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0 = x \\ x_1, \ldots, x_n \geq a}} \hat{p}(x_0, x_1) \hat{p}(x_1, x_2) \cdots \hat{p}(x_n, y). \end{aligned}$$

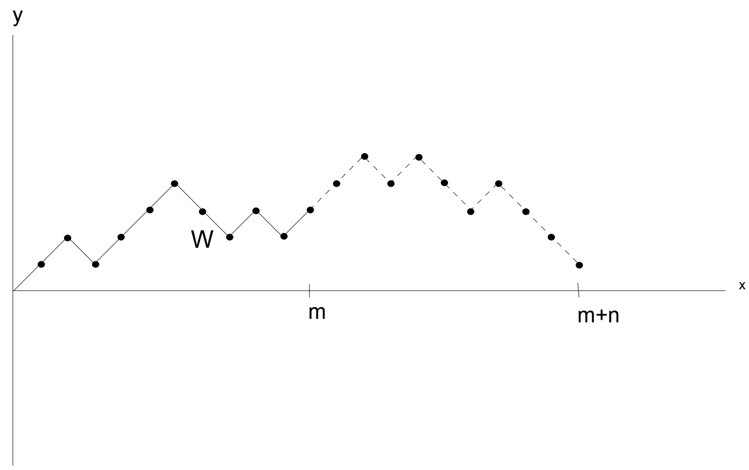

Figura 5.5: Primeros m pasos de R.

En el siguiente lema veremos algunas propiedades sobre estas funciones que más adelante nos serán de mucha ayuda.

Lema 5.8. *Para $g_a(x,y)$ y $\hat{g}_a(x,y)$ como se definieron arriba, se cumple que :*
(a) $g_a(x,y) = \hat{g}_a(y,x)p$ para $x,y \geq a$
(b) $g_a(x,y) = g_{a+b}(x+b,y+b)$ para $x,y \geq a$ y para toda $b \in \mathbb{Z}$
(c) $\xi(x) = G(0,[0,x)) = \sum_{0<a\leq x} g_a(a,x)$ para $x \geq 1$.

Demostración. Para (a) basta con notar que $\delta_{x,y} = \delta_{y,x}$ y $p(x,y) = \hat{p}(y,x)$. Como x es igual a y si y sólo si $x+b$ es igual a $y+b$, para (b) basta demostrar que

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0=x \\ x_1,\ldots,x_n\geq a}} p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_n,y) \\ = &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x'_0=x+b \\ x'_1,\ldots,x'_n\geq a+b}} p(x'_0,x'_1)p(x'_1,x'_2)\cdots p(x'_n,y+b) \end{aligned}$$

Podemos escribir a cada $x'_i \geq a+b$ como $x'_i = x_i + b$ para $x_i \geq a$, por lo que la cardinalidad de los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\}$ y $B = \{x' \in \mathbb{Z} : x' \geq a+b\}$ es la misma. Gracias a esto y a la homogeneidad de las caminatas aleatorias se tiene que:

$$p(x_i,x_j) = p(x_i+b,x_j+b) = p(x'_i,x'_j)$$

la igualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0=x \\ x_1,\ldots,x_n\geq a}} p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_n,y) \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0'=x+b \\ x_1',\ldots,x_n'\geq a+b}} p(x_0',x_1')p(x_1',x_2')\cdots p(x_n',y+b) \end{aligned}$$

se cumple. Lo cual demuestra (b).
Finalmente para demostrar (c), sabemos que $\xi(x) = G(0,[0,x))$. El lado derecho de esta igualdad podemos escribirla, por el Lema 5.2, como:

$$\begin{aligned} G(0,[0,x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n, S_n \in [0,x)) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n, S_n \in [0,x)) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} \in [0,x)) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} & \sum_{0<a\leq x} g_a(a,x) \\ = & \sum_{0<a\leq x} \delta_{a,x} + \sum_{0<a\leq x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0=a \\ x_1,\ldots,x_n\geq a}} p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\ldots p(x_n,x) \\ = & \ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{0<a\leq x} \sum_{\substack{x_0=0 \\ x_1,\ldots,x_n\geq 0}} p(0,x_1-a)p(x_1-a,x_2-a)\ldots p(x_n-a,x-a) \\ = & \ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{0<a\leq x} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} = x-a) \\ = & \ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1^- \geq n+1, S_{n+1} \in [0,x)) \end{aligned}$$

□

Después de este lema regresemos a encontrar la probabilidad de que el camino inverso trasladado de $(0,S_1,\ldots,S_{T_1^-})$ siga en sus primeros m pasos el camino $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$, que $S_{T_1^-} = -a$, sin importar el valor de T_1^-. Este evento lo denotaremos por $\Lambda(a_1,a_2,\ldots,a_m;a)$, y puede ser escrito como:

$$\Lambda(a_1,a_2,\ldots,a_m;a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(a_1,a_,\ldots,a_m;a).$$

Lema 5.9. *Para enteros positivos $a, a_1, a_2, \ldots, a_m$ con $m \geq 1$ y $0 < a \leq a^\star$ con $a^\star = \min_{1 \leq k \leq m} a_k$, se tiene que*

$$\mu(\Lambda(a_1, \ldots, a_m; a)) = \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j) g_a(a, a_m) \text{ con } a_0 = 0$$

Demostración. Primero encontremos la probabilidad del evento $\Lambda_0(a_1, \ldots, a_m; a)$. Este evento consiste en que el camino inverso trasladado de $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$ sea igual a $(0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ donde $T_1^- = m$ y $S_m = -a_m = -a$, por lo que $\mu(\Lambda_0(a_1, \ldots, a_m; a)) = \mu(\mathbf{w} = (0, a_1, a_2, \ldots, a_m))$. Y por el Lema 5.7 tenemos que:

$$\mu(\Lambda_0(a_1, \ldots, a_m; a)) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j) & \text{si } a_m = a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora para $n \geq 1$, la probabiliad de que $\Lambda_n(a_1, \ldots, a_m; a)$ suceda, corresponde a la probabilidad de que el camino inverso de $(0, S_1, \ldots, S_{T_1^-})$, donde $T_1^- = n + m$ y $S_{n+m} = -a$, siga en sus primeros m pasos el camino $(0, a_1, \ldots, a_m)$, sin importar el camino que siga desde el tiempo $m + 1$ hasta el momento $n + m$ cuando toma el valor $-a$. Por lo que la probabilidad de $\Lambda_n(a_1, \ldots, a_m; a)$ podemos escribirla como:

$$\begin{aligned}
& \mu(\Lambda_n(a_1, \ldots, a_m; a)) \\
= & \sum_{a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1} \geq a} \mu(\mathbf{w} = (0, a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n})) \\
= & \sum_{a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1} \geq a} \hat{p}(0, a_1) \hat{p}(a_1, a_2) \cdots \hat{p}(a_{m+n-1}, a) \\
= & \sum_{a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1} \geq a} [\prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j)] \hat{p}(a_m, a_{m+1}) \hat{p}(a_{m+1, a_m+2}) \cdots \hat{p}(a_{m+n-1}, a) \\
= & [\prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j)] \sum_{a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1} \geq a} \hat{p}(a_m, a_{m+1}) \hat{p}(a_{m+1, a_m+2}) \cdots \hat{p}(a_{m+n-1}, a)
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad se usó el Lema(5.7). Si definimos la función g_n como

$$g_n = \begin{cases} \hat{p}(a_m, a) & \text{si } n = 1 \\ \sum_{a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1} \geq a} \hat{p}(a_m, a_{m+1}) \hat{p}(a_{m+1, a_m+2}) \cdots \hat{p}(a_{m+n-1}, a) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

tenemos que $\mu(\Lambda_n(a_1, \ldots, a_m; a)) = \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j) g_n$ para $n \geq 1$.

Notemos además que $\delta_{a_m, a} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \hat{g}_a(a_m, a) = g_a(a, a_m)$ pues

$$\hat{g}_a(a_m, a) = \delta_{a_m,a} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{x_0=a_m \\ x_1,\dots,x_n \geq a}} \hat{p}(x_0, x_1)\hat{p}(x_1, x_2)\cdots\hat{p}(x_n, a).$$

De todo lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(\Lambda(a_1,\dots,a_m;a)) &= \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(a_1,\dots,a_m;a)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\Lambda_n(a_1,\dots,a_m;a)) \\
&= \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j)\mathbb{1}_{a=a_m} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Lambda_n(a_1,\dots,a_m;a)) \\
&= \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j)\mathbb{1}_{a=a_m} + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j) g_n \\
&= \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j)[\delta_{a,a_m} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n] \\
&= \prod_{j=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j) g_a(a, a_m)
\end{aligned}$$

□

Después de este último resultado tenemos todo lo necesario para demostrar que $\hat{h}_\xi$ es la función de transición del proceso $\{W_n\}$.

Teorema 5.10. *Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots \in \mathcal{W}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común μ. Sea $\{W_n\}$ el proceso que se definió en la primera sección de este capítulo. Dados enteros $a_0 = 0$, $a_1 > 0, \dots, a_m > 0$ para $m \geq 1$ tenemos que*

$$\mathbb{P}(W_0 = 0, W_1 = a_1, \dots, W_m = a_m) = \prod_{k=1}^{m} \hat{P}_\xi(a_{k-1}, a_k)$$

Demostración. Sean Δ y Δ_a definidos como:

$$\Delta = \{W_k = a_k, 1 \leq k \leq m\}$$
$$\Delta_a = \{W_k = a_k, 1 \leq k \leq m, W_m^\star = a\}, \text{ donde } 0 < W_m^\star = \min_{n \geq m} W_n,$$

por lo que

$$\Delta = \bigcup_{0 < a \leq a_m} \Delta_a. \tag{5.2}$$

Para $0 < a \le a_m$ definimos $m(0) > m(1) > m(2) > \cdots > m(\alpha) > 0$ como

$$\begin{aligned} m(0) &= m \\ m(1) &= \max\{n < m : a_n < a\} \\ m(2) &= \max\{n < m(1) : a_n < a_{m(1)}\} \\ &\vdots \\ m(\alpha) &= \max\{n < m(\alpha-1) : a_n < a_{m(\alpha-1)}\}. \end{aligned}$$

Véase Figura5.6

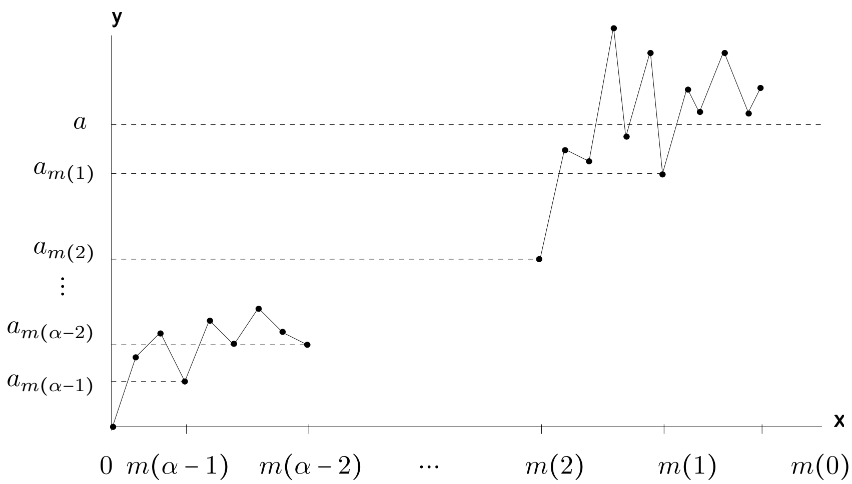

Figura 5.6: $m(0), m(1), \ldots, m(\alpha)$

Veamos que para $0 \le k \le \alpha - 2$,

$$(0, a_{m(\alpha-k)+1} - a_{m(\alpha-k)}, a_{m(\alpha-k)+2} - a_{(\alpha-k)}, \ldots, a_{m(\alpha-k-1)} - a_{m(\alpha-k)}) \in \mathcal{W}.$$

Sea $j \in \mathbb{Z}$, tal que $1 \le j \le m(\alpha-k-1) - m(\alpha-k) - 1$. Por la definición de $m(\alpha-k)$, como $m(\alpha-k)+j > m(\alpha-k)$, y $m(\alpha-k) = \max\{n < m(\alpha-k-1) : a_n < a_{m(\alpha-k-1)}\}$, se tiene que

$$a_{m(\alpha-k)+j} \geq a_{m(\alpha-k-1)}$$

lo cual implica que

$$a_{m(\alpha-k)+j} - a_{m(\alpha-k)} \geq a_{m(\alpha-k-1)} - a_{m(\alpha-k)}$$

por lo que

$$a_{m(\alpha-k-1)} - a_{m(\alpha-k)} = \min_{1 \le j \le m(\alpha-k-1)-m(\alpha-k)} a_{m(\alpha-k)+j} - a_{m(\alpha-k)}$$

Además como $a_{m(\alpha-k)} < a_{m(\alpha-k-1)}$, tenemos que

$$0 < a_{m(\alpha-k-1)} - a_{m(\alpha-k)} = \min_{1\leq j\leq m(\alpha-k-1)-m(\alpha-k)} a_{m(\alpha-k)+j} - a_{m(\alpha-k)}.$$

Por lo tanto $(0, a_{m(\alpha-k)+1}-a_{m(\alpha-k)}, a_{m(\alpha-k)+2}-a_{(\alpha-k)}, \ldots, a_{m(\alpha-k-1)}-a_{m(\alpha-k)}) \in \mathcal{W}$.

Con ayuda de estos caminos en $\mathcal{W}$ podemos escribir al evento Λ_a como:

$$\Lambda_a = [\bigcap_{k=1}^{\alpha-1}(w_k = (0, a_{m(\alpha-k+1)+1} - a_{m(\alpha-k+1)}, \ldots, a_{m(\alpha-k)} - a_{m(\alpha-k+1)}))] \quad (5.3)$$

$$\cap(w_\alpha \in \Lambda(a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, \ldots, a_m - a_{m(1)}; a - a_m).$$

Esto porque al definir $m(i)$, para $0 \leq i \leq \alpha$, de la manera que lo hicimos encontramos los tiempos de escalera que deben haber en el intervalo de tiempo $[0, m]$, para que que $W_k = a_k$, con $1 \leq k \leq m$. Los tiempos de escalera ocurren cada vez que la caminata aleatoria baja más de lo que sube desde el anterior tiempo de escalera . Por lo que en el proceso $\{W_n\}$, el cual invierte los saltos de $\{S_n\}$, los tiempos de escalera de $\{S_n\}$ corresponden a los tiempos en los que el proceso ha subido más de lo que ha bajado a partir del último tiempo de escalera. Podemos ver que los tiempos en los que esto ocurre coinciden con los tiempos $m(k)$, para $1 \leq k \leq \alpha$. Para dos tiempos $m(k)$ y $m(k+1)$, se tiene que $a_{m(k+1)} < a_{m(k)}$, por lo que el camino $(a_{m(k+1)}, a_{m(k+1)+1}, \ldots, a_{m(k)})$ sube más de lo que baja. Además para $m(k+1) < j < m(k)$, $a_j \geq a_{m(k)}$ por lo que el camino $(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{m(k)})$ baja más de lo que sube, o lo que sube es igual a lo que baja. Por ello j no puede ser un tiempo de escalera de $\{S_n\}$. Por ésto, los tiempos $m(k)$, con $1 \leq k \leq \alpha$, tienen que coincidir con los tiempos de escalera de la camianta aleatoria $\{S_n\}$ hasta el tiempo m , para que $W_k = a_k$, $1 \leq k \leq m$. Entonces $W_j = a_j$ con $1 \leq j \leq m$, si $\mathbf{w}_1 = (0, a_1, a_2, \ldots, a_{m(\alpha-1)})$,
$a_{m(\alpha-1)} + \mathbf{w}_2 = (a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha)+1}, a_{m(\alpha)+2}, \ldots, a_{m(\alpha-2)})$, es decir si
$\mathbf{w}_2 = (0, a_{m(\alpha)+1} - a_{m(\alpha)}, a_{m(\alpha)+2} - a_{m(\alpha)}, \ldots, a_{m(\alpha-2)} - a_{m(\alpha)})$. En general si $a_{m(\alpha-k-1)} + \mathbf{w}_k = (a_{m(\alpha-k-1)}, a_{m(\alpha-k-1)+1}, \ldots, a_{m(\alpha-k-2)})$ para $1 \leq k \leq \alpha - 1$. Y para $m(1) < j \leq m$ tenemos que tener que los primeros $m-m(1)$ pasos del camino w_α, sean $(0, a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, \ldots, a_m - a_{(1)})$, y además que $w_\alpha(l_\alpha) = a - a_m(1)$.

Por todo esto podemos escribir realmente a Δ_a según 5.3. Al escribir de esta manera a Δ_a, utilizando la independecia de las variables $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots$, el Lema 5.7 y el Lema 5.9, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Delta_a) &= \mathbb{P}[\bigcap_{k=1}^{\alpha-1}(w_k = (0, a_{m(\alpha-k+1)+1} - a_{m(\alpha-k+1)}, \ldots, a_{m(\alpha-k)} - a_{m(\alpha-k+1)}))] \\
&\cap \quad (w_\alpha \in \Lambda(a_{m(1)+1} - a_{m(1)}, \ldots, a_m - a_{m(1)}; a - a_m(1)) \\
&= \prod_{k=1}^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{m(\alpha-k)-m(\alpha-k+1)} \hat{p}_{kj} * \prod_{j=1}^{m-m(1)} \hat{p}_{kj} g_{a-a_{m(1)}}(a - a_{m(1)}, a_m - a_{m(1)})
\end{aligned}$$

donde

$$\hat{p}_{kj} = \hat{p}(a_{m(\alpha-k+1)+j-1} - a_{m(\alpha-k+1)}, a_{m(\alpha-k+1)+j} - a_{m(\alpha-k+1)})$$

Usando el inciso (b) del Lema 5.8 y desarrollando la última igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Delta_a) &= \prod_{k=1}^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{m(\alpha-k)-m(\alpha-k+1)} \hat{p}_{kj} * \prod_{j=1}^{m-m(1)} \hat{p}_{kj} g_a(a, a_m) \\
&= (\prod_{k=1}^{\alpha} \prod_{j=1}^{m(\alpha-k)-m(\alpha-k+1)} \hat{p}_k j) g_a(a, a_m) \\
&= \prod_{k=1}^{\alpha} \hat{p}_{k1} \hat{p}_{k2} \cdots \hat{p}_{m(\alpha-k)-m(\alpha-k+1)} \\
&= (\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{j-1}, a_j)) g_a(a, a_m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con ayuda de (c) y del Lema 5.8

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Delta) &= \mathbb{P}(\bigcup_{0<a\leq a_m} \Delta_a) \\
&= \sum_{0<a\leq a_m} \mathbb{P}(\Delta_a) \\
&= \sum_{0<a\leq a_m} (\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{k-1}, a_k)) g_a(a, a_m) \\
&= (\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{k-1}, a_k)) \sum_{0<a\leq a_m} g_a(a, a_m) \\
&= (\prod_{k=1}^{m} \hat{p}(a_{k-1}, a_k)) \xi(a_m) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \hat{p}_\xi(a_{k-1}, a_k)
\end{aligned}$$

□

Se puede demostrar que el proceso W_n es una cadena de Markov con función de transición $\hat{h}_\xi$, para una caminata $\{S_n\}$ con valores en $\mathbb{R}$, utilizando una sucesión de caminatas aleatorias $\{S_{N,n}, n \geq 0\}$ con valores en $2^{-N}\mathbb{Z}, N \geq 1$ que se aproximan a $\{S_n\}$. Esta demostración de forma detallada se puede encontrar en [11].

5.3. Ejemplo

Calcularemos para una caminata aleatoria simple $\{S_n\}$, las probabilidades de transición $\hat{h}_\xi(x,y)$ del proceso $\{W_n\}$ asociado a ella. Mediante algunos cálculos obtenemos que

$$g_0(0,x) = \frac{r^x}{q}, \text{ para } x \geq 0, \text{ donde } r = \frac{p}{q}.$$

De ésto y el Lema 5.8 tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \sum_{0<a\leq x} g_a(a,x) \\
&= \sum_{a=1}^{x} g_0(0,x-a) \\
&= \sum_{a=1}^{x} \frac{r^{x-a}}{q} \\
&= \frac{r^x}{q} \sum_{a=1}^{x} (\frac{1}{r})^a.
\end{aligned}$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$, entonces $r = 1$. Por ello

$$\xi(x) = \frac{r^x}{q} \sum_{a=1}^{x} (\frac{1}{r})^a = \frac{x}{q}.$$

Si $0 < p < \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \frac{r^x}{q} \sum_{a=1}^{x} (\frac{1}{r})^a \\
&= \frac{r^x}{q} [\frac{(\frac{1}{r})^{x+1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} - 1}] \\
&= \frac{1}{q} [\frac{(\frac{r^x}{r^{x+1}}) - \frac{r^x}{r}}{\frac{1}{r} - 1}] \\
&= \frac{1}{q} [\frac{(\frac{1}{r}) - r^{x-1}}{\frac{1}{r} - 1}] \\
&= \frac{1}{q} [\frac{1 - r^x}{1 - r}]
\end{aligned}$$

Ya que tenemos calculada la función $\xi(x)$, podemos obtener explícitamente a $\hat{h}_\xi(x,y) = \dfrac{\xi(y)}{\xi(x)} \hat{p}(x,y)$.

Recordemos que:

$$p(y,x) = \begin{cases} q & \text{si } y = x+1 \\ p & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$, entonces $\dfrac{\xi(y)}{\xi(x)} = \dfrac{y}{x}$. Por los tanto, para $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \hat{h}_\xi(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{y}{2x} & \text{si } y = x+1,\ x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{y}{2x} & \text{si } y = x-1,\ x \geq 2 \\[2ex] 0 & \text{si } y \neq x+1, x-1,\ x \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x} & \text{si } y = x+1,\ x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{x-1}{2x} & \text{si } y = x-1,\ x \geq 2 \\[2ex] 0 & y \neq x+1, x-1,\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $0 < p < \frac{1}{2}$, entonces $\dfrac{\xi(y)}{\xi(x)} = \dfrac{1-r^y}{1-r^x}$. Por los tanto, para $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \hat{h}_\xi(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{1-r^y}{1-r^x}q & \text{si } y = x+1,\ x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{1-r^y}{1-r^x}p & \text{si } y = x-1,\ x \geq 2 \\[2ex] 0 & \text{si } y \neq x+1, x-1,\ x \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1-r^{x+1}}{1-r^x}q & \text{si } y = x+1,\ x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{1-r^{x-1}}{1-r^x}p & \text{si } y = x-1,\ x \geq 2 \\[2ex] 0 & y \neq x+1, x-1,\ x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora sólo nos falta calcular $\hat{h}_\xi(x,y)$ para $0 \le x \le 1$. Para $x = 0$

$$\hat{h}_\xi(0,y) = \xi(y)p(y,0)\mathbb{1}_{\{y>0\}}.$$

Notemos que ésta función es distinta de cero si y sólo si $y = 1$. Por lo tanto

$$\hat{h}_\xi(0,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para $x = 1$, la función $\hat{h}_\xi(1,y) = \dfrac{\xi(y)}{\xi(1)}p(y,1)\mathbb{1}_{\{y>0\}}$, es distinta de cero si y sólo si $y = 2$. Por lo tanto

$$\hat{h}_\xi(1,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Recordemos que en el Teorema 4.8 del Capítulo 3 vimos que las distribuciones finito dimensionales de una caminata aleatoria simple condicionada a ser positiva, tienden a las de un proceso de Markov $\{Y_n, \ge 0\}$ con espacio de estados $\{0,1,\dots\}$ y con probabilidades de transición

$$r(x,x+1) = \frac{x+2}{2(x+1)} = 1 - r(x,x-1) = \frac{x}{2(x+1)}.$$

Ya que hemos calculado las funciones de transición $\hat{h}_\xi(x,y)$ del proceso $\{W_n\}$ asociado a una caminata aleatoria simple, podemos ver que en el caso en el ue $p = q = \frac{1}{2}$, el proceso $\{Y_n\}$, coincide con el proceso trasladado $\{\bar{W}_n\}$, definido como

$$\bar{W}_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ 1 + W_n & \text{para } n \ge 1. \end{cases}$$

Es decir, para las probabilidades de transición $r(x,y)$ del proceso $\{Y_n\}$, se tiene que

$$r(x,y) = \hat{h}_\xi(x+1,y+1).$$

Apéndice A

Cadenas de Markov

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espacio de probabilidad y $\mathcal{E}$, un conjunto no vacío, finito o numerable.

Definición A.1. *Una cadena de Markov es una colección de variables aleatorias* $\{X_n : \Omega \to \mathcal{E}, n = 0, 1, 2, \dots\}$*, que cumple que para toda* $n \geq 1$*, y toda sucesión* $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ *se cumple que*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

Esta propiedad podemos entenderla, como que el futuro es independiente del pasado, sólo depende del presente. En el Lema 1.9 vimos que las caminatas aleatorias tienen esta propiedad.

La evolución de una cadena de Markov está descrita por sus probabilidades de transición, $p_{n,m}(x, y) = \mathbb{P}(X_m = y | X_n = x)$. Estas, cumplen con ser funciones de transición, esto es que $p_{n,m}(x, \Omega) = 1$, para toda $x \in \Omega$, y además que cumpla las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, es decir que:

$$p_{n,m}(x, y) = \int_{\Omega} p_{n,r}(x, z) p_{r,m}(z, y) dz$$

para enteros no negativos tales que $0 \leq n \leq r \leq m$.

Cuando las funciones de transición de una cadena de Markov dependen sólo de x y y, se tiene una cadena de Markov homogénea.

Definición A.2. *Decimos que una cadena de Markov es homogénea si*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = a) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = a)$$

Definición A.3. *Decimos que una variable τ que toma valores en $0, 1, 2, \ldots$ es un tiempo de paro respecto a $\{X_n, n \geq 0\}$ si la ocurrencia del evento $\{T = k\}$ puede ser determinada por las variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$.*

Veremos en el siguiente Teorema, que la propiedad de Markov se cumple tabién para tiempos aleatorios.

Teorema A.4. *Las cadenas de Markov cumplen la propiedad de Markov fuerte. Esto es, para un tiempo de paro finito τ, respecto a $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, se tiene que:*

$$\mathbb{P}(X_{\tau+1} = x | X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y) = \mathbb{P}(X_{\tau+1} = x | X_\tau = y)$$

para $y_1, \ldots, y_k, y, x \in \Omega$

Demostración.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{\tau+1} = x, X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{\tau+1} = x, X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y, \tau = n) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < n, X_n = y, \tau = n) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = y) \mathbb{P}(X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < n, X_n = y, \tau = n) \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = x | X_0 = y) \mathbb{P}(X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < n, X_n = y, \tau = n) \\
= & \; p_{0,1}(y, x) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < n, X_n = y, \tau = n) \\
= & \; p_{0,1}(y, x) \mathbb{P}(X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y,)
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{\tau+1} = x | X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y) \\
= & \frac{\mathbb{P}(X_{\tau+1} = x, X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y)}{\mathbb{P}(X_k = y_k \text{ para } 0 \leq k < \tau, X_\tau = y)} \\
= & \; p_{0,1}(x, y) \\
= & \; P(X_{\tau+1} = y | X_\tau = y)
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] J. Bertoin and R.A. Doney, *On conditioning a random walk to stay nonnegative*, Annals of Probability **22** (1994), no. 4, 2152-2167.

[2] J. Bertoin, *Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Levy processes.*, Stoch. Process, Appl. **47** (1993), 1735.

[3] María E. Caballero, Carlos Velarde, Gerónimo Uribe, and Victor M. Rivero, *Cadenas de Markov, un enfoque elemental*, Aportaciones Matemcas: Textos [Mathematical Contributions: Texts], vol. 29, Sociedad Matemática Mexicana, México, México, 2004.

[4] Ronald A. Doney, *Fluctuation theory for Lévy Processes*, Lecture Notes in Math, École d' eté probabilités de Saint-Flour XXXV-2005, vol. 1897, Springer, Berlin, 2007.

[5] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge U Press, Cambridge, 2010.

[6] William Feller, *An introduction tu Probability theory and its applications Vol. II*, Jhon Wiley,Segunda edición, New York, 1971.

[7] Geoffrey Grimmet and David Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, United States, 2001.

[8] Robert W. Keener, *Limit theorems for random walks conditioned to stay positive*, Annals of Probability **20** (1992), no. 2, 801-824.

[9] J.W. Pitman, *One dimensional Brownian motion and the three dimensional Bessel Process*, Advances in applied Probability **7** (1975), 511-526.

[10] Victor M. Rivero, *Curso: Procesos de Lévy, cambios de tiempo y procesos de Markov auto-similares*, IIMAS, Mexico (2010).

[11] Hiroshi Tanaka, *Time reversal of random walks in one-dimension*, Tokyo J. Math **12** (1989), 159-174.