Modelos elementales para el problema de la ruina

María Emilia Caballero
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
mariaemica@gmail.com

1 Introducción

En este trabajo buscamos introducir al lector al problema básico de la ruina, es decir cuando tenemos un modelo aleatorio que evoluciona en el tiempo, también llamado proceso estócastico que tome valores reales, cómo podemos conocer, bajo ciertas condiciones dadas, la probabilidad de que llegue, por primera vez, a tener valores negativos (llegar a la ruina) o bien lograr rebasar un nivel positivo prefijado. Presentamos los casos más sencillos, y los métodos de solución son elementales. Sólo supondremos que el lector cuenta con conocimientos elementales de probabilidad, tales como distribución, independencia y condicionamiento.

2 Caso discreto

Las **caminatas aleatorias simples** pueden verse como un modelo para un juego de volados: hay dos jugadores que llamaremos A y B; cada jugador apuesta en un volado un peso. Gana ese peso el jugador A con probabilidad $p \in (0,1)$ (sale águila) y lo pierde con probabilidad $q = 1 - p$ (sale sol). El modelo matemático se construye con una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que describen a los resultados de los volados sucesivos), y cada una de ellas es una variable Bernoulli de parámetro $p \in (0,1)$, es decir, X_1 toma el valor 1 con probabilidad p y toma el valor -1 con probabilidad $(1-p)$. Si el capital inicial de A es $a \in \mathbb{N}$ pesos y el de B es de $b \in \mathbb{N}$ pesos, el capital de A después de n volados es

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

y el capital de B será

$$R_n = b - \sum_{i=1}^{n} X_i = (c-a) - \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Cuando alguno de los dos pierde todo su dinero, el juego termina y el jugador que ganó todo el capital $c = (a + b)$ es quien gana el juego.

Esto se puede visualizar como un árbol binario, que describe todas las posibilidades para el juego: a continuación lo describimos hasta el cuarto juego (figura 1).

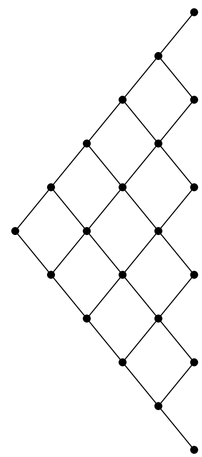

Figura 1: Arbol Binario

En la figura 2 se tienen dos trayectorias destacadas: la roja describe el hecho de que A ganó dos veces seguidas, luego perdió una vez, gano una vez y volvió a perder; la amarilla describe el hecho de que A perdió los dos primeros volados luego ganó dos veces y finalmente volvió a perder.

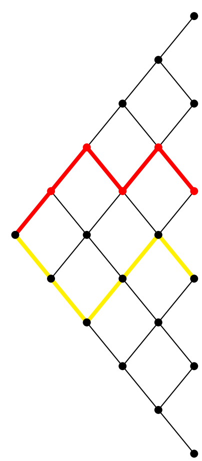

Figura 2: Arbol Binario

¿Cuál es la probabilidad de que gane el jugador A? ¿Cuál la que gane B? Claramente esto va depender del valor de p y del monto del capital inicial de cada uno. Una forma de resolver el problema es usando probabilidad condicional. Para ello dejaremos variar los montos de los capitales iniciales, pero se mantiene constante el toral c.

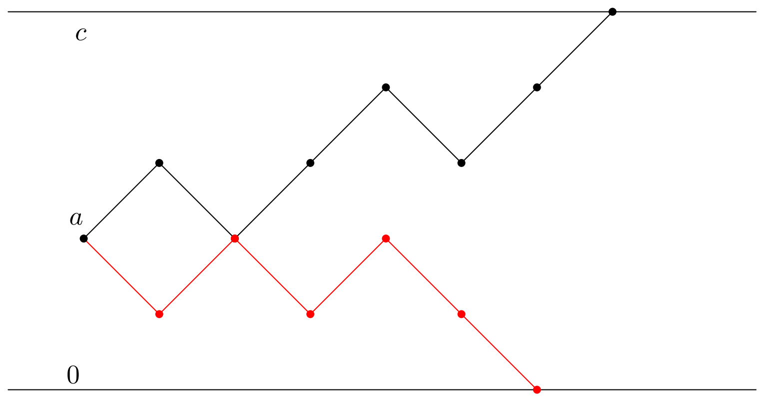

Figura 3:

Sea J el evento (A pierde), es decir, S_n alcanza primero el nivel 0 antes que el nivel c. Llamemos $h(u)$ a la probabildad de que A pierda habiendo empezado con $u \in \{1, 2, \dots, (c-1)\}$ pesos.

$$h(u) := \mathbb{P}(J|S_0 = u) := \mathbb{P}_u(J).$$

Es claro que podemos utilizar la infomación de lo que pasa en el primer volado (A gana o pierde un peso) para escribir lo siguiente

$$h(u) = \mathbb{P}\big(J|S_0 = u\big) = \mathbb{P}\big((J \cap (S_1 = 1+u)) \cup (J \cap (S_1 = u-1))|S_0 = u\big)$$

lo que por aditividad y por la definición de probabilidad condicional es igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{P}(J \cap (S_1 = 1+u) \cap (S_0 = u)) + \mathbb{P}(J \cap (S_1 = u-1) \cap S_0 = u)}{\mathbb{P}(S_0 = u)} = \\
&= \mathbb{P}[J|(S_1 = u+1))\,\mathbb{P}(S_1 = u+1)] + \mathbb{P}[J|(S_1 = u-1))\,\mathbb{P}(S_1 = u-1)] = \\
&= ph(u+1) + qh(u-1).
\end{aligned}$$

en las últimas igualdades se usa la independencia de las variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como además se sabe que $h(0) = 1$ y $h(c) = 0$, el problema se traduce en resolver la ecuación en diferencias finitas:

$$h(u) = ph(u+1) + qh(u-1), \;\; h(0) = 1, h(c) = 0.$$

- En el caso de que $p = 1/2 = q$ se tiene

  $$h(u) = \frac{1}{2}\big(h(u+1) + h(u-1)\big), \;\; h(0) = 1, h(c) = 0$$

  es decir, la función h es lineal y se conocen sus valores en la frontera por lo que se obtiene directamente la solución (única)

  $$h(u) = \frac{c-u}{c}$$

  y para el caso que se tenía $u = a$ esta probabilidad es

  $$h(a) == \frac{b}{a+b}.$$

- Para resolver el sistema en el caso que $p \neq q$ se procede asi:

$$(p+q)h(u) = ph(u+1) + qh(u-1),$$

lo que es equivalente a

$$p\big(h(u) - h(u+1)\big) = q\big(h(u-1) - h(u)\big), \;\; u = 1, 2, \ldots, (c-1). \qquad (1)$$

- Sean $d_k = h(k) - h(k+1), \;\; k = 1, 2, \ldots, (c-1) \;\; y \;\; r = q/p$.
- La igualdad 1 escrita con esta notación es

$$d_u = r d_{u-1},$$

y por iteración se llega a

$$d_u = r^n d_0$$

- en consecuencia

$$1 = h(0) - h(c) = \sum_{j=0}^{c-1} d_j = d_0 \sum_{j=0}^{c-1} r^j = d_0 \frac{1 - r^c}{1 - r},$$

$$h(u) = h(u) - h(c) = \sum_{i=u}^{c-1} d_i = d_0 \sum_{i=u}^{c-1} r^i = d_0 \frac{r^u - r^c}{1 - r}.$$

De la primera ecuación se obtiene el valor de d_0 que se sustituye en la segunda y se obtiene

$$h(u) = \frac{r^u - r^c}{1 - r^c} \qquad (2)$$

De esta manera hemos obtenido la probabilidad de que el jugador A pierda el juego si empieza con j pesos.

Por otra parte, si M denota al evento “B pierde” el juego y denotamos por

$$k(u) = \mathbb{P}(M | S_0 = c - u)$$

tenemos nuevamente dos casos: $p = q$ o $p \neq q$; si $p = q = 1/2$ ya sabemos que el resultado es lineal y se tiene

$$k(u) = u/c, \;\; p = q = 1/2$$

porque las condiciones a la frontera ahora son diferentes, pues $k(0) = 0$ y $k(c) = 1$. En el caso el caso $p \neq q$, se puede hacer con cálculos análogos a loshechos en el problema anterior o simplemente invertir los papeles A y de B e intercambia a p por q es decir , aparecerá $1/r$ en vez de r y $(c-u)$ en vez de u. Al aplicar la fórmula 2 a esta situación y hacer los cálculos se obtiene:.

$$k(u) = \frac{1 - r^u}{1 - r^c}, \;\; p \neq q$$

y lo extraordinario es ver que

$$h(u) + k(u) = 1, \;\; u = 0, 1, \ldots, c \qquad (3)$$

en cualquier caso y para toda $u = 0, 1, 2, \ldots, c$.

Otra forma en que se pueden escribir los resultados anteriores es mediante el uso de "tiempos de paro". Se define

$$\tau_x = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = x\}$$

y el problema se puede escribir así: La probabilidad de que el jugador A pierda, si empezó con $u \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ pesos es

$$\mathbb{P}(\tau_c > \tau_0) = \mathbb{P}_u(\tau_c > \tau_0)$$

ya que esa probabilidad indica que se llegó primero al nivel 0 antes que al c.

3 Consecuencias

Del simple cálculo que se ha hecho, podemos obtener propiedades notables de la caminata aleatoria: aquí usaremos las notaciones $h(c, u)$ y $k(c, u)$ en lugar de $h(u)$ y $k(u)$ para hacer énfasis en que el resultado depende de la barrera superior c (no se menciona la inferior cuando se mantenga fija e igual a cero).

- toda caminata aleatoria simple sale de un intervalo dado con probabilidad 1 esto por la igualdad 3.
- si $r < 1$, $\lim_{c\to\infty} h(c, u) = r^u$ lo que significa que tiene una probabilidad positiva $(1 - r^u)$ de no arruinarse. Si el jugador A empieza con un capital más grande, la probablidad de no arruinarse también crece, como es lógico esperar.
- si $r > 1$, $\lim_{c\to\infty} h(c, u) = 1$, lo que significa que eventualmente se arruinará con probabilidad 1y es también razonable al saber que en cada volado tiene mayor probabilidad de perder que de ganar($q > p$).
- si $r < 1$, $\lim_{c\to\infty} k(c, u) = 1 - r^u$ y finalmente si $r > 1$, $\lim_{c\to\infty} k(c, u) = 0$.
- Se puede probar que la esperanza de $h(u)$ y la de $k(u)$ son finitas para toda $u \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$.
- Si se empieza en el punto $a > 0$, al trasladar S_0 al origen el intervalo $[0, c]$ se traslada al $[-a, b]$ y el resultado anterior se traduce en:

  $$\lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b | S_0 = 0) = r^a, \quad r < 1$$

  y

  $$\lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b | S_0 = 0) = 1, \quad r > 1$$

4 Caminatas aleatorias generales

Lo notable es que muchas de estas propiedades se heredarán para cualquier caminata aleatoria,

Definición 4.1. *se dice que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una* **caminata aleatoria** *si es de la forma*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde $S_0 =$ *constante y* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas (vaiid).*

En este caso ya no se pide que las variables X_i sean Bernoulli, sólo se les pide que sean independientes y tengan la misma distribución.

La analogía con lo anterior se ve gracias al el siguiente teorema:

Teorema 4.2. *Dada una caminata aleatoria* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no trivial, sucede una y sólo una de la tres propiedade siguientes:*

1. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *o*
2. $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *y* $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ *o bien*
3. $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$

Dos casos son sencillos de probar:

1.- Si X_i tiene media finita y positiva, $\boldsymbol{E}(X_i) = m \in (0, \infty)$, la ley de las grandes números nos permite afirmar que se cumple el primer caso. En efecto, por dicha ley se tiene la convergencia (c.s) siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

3.- Si X_i tiene media finita y negativa, la misma ley nos dice que se cumple el caso 3. Es claro que el caso de las caminatas aleatorias simples para $p \neq q$, queda incluido en estos dos casos.

Un poco más dificil de probar son los casos restantes: la media $m = 0,\ m = -\infty$ o $m = +\infty$.

Para estudiar el comportamiento asintótico, en estos casos se requiere de la ley 0-1 de Hewitt- Savage y no lo vamos a hacer aquí. Un estudio detallado con enfoque elemental, se encuentra en ([7].)

Ejemplo 4.3. Un ejemplo muy cercano a las caminatas aleatorias son las **caminatas aleatorias con retraso** o **caminatas aleatorias perezosas** ([2]) y el modelo es importante en aplicaciones diversas, por ejemplo en procesamiento de señales en donde dependiendo del valor del peso de la señal se envían tres posibles números a la central que esta procesando toda esta información: si el peso el grande, envía el número 1, si es muy pequeño, el (-1) y no transmite nada si los pesos son intermedios. Cuando se rebasa un cierto nivel se deben tomar medidas adecuadas y al bajar de otro nivel fijo, también se deberá actuar en consecuencia.

Claro que cada modelo deberá precisar que es grande y chico así como estos niveles de los que no podemos salirnos.

El modelo matemático para esto, es una caminata aleatoria en donde las variables aleatorias independientes X_i que se están sumando son las siguientes

$X_i = 1$ con probabilidad $p \in (0, 1)$

$X_i = -1$ con probabilidad $q \in (0, 1)$

$X_i = 0$ con probabilidad $r \in (0, 1)$

y donde $p + q + r = 1,\ p, q, r \geq 0$.Es obvio que si $r = 0$ volvemos a las caminatas aleatorias simples.

Aquí un esquema representa a dos trayectorias posibles:

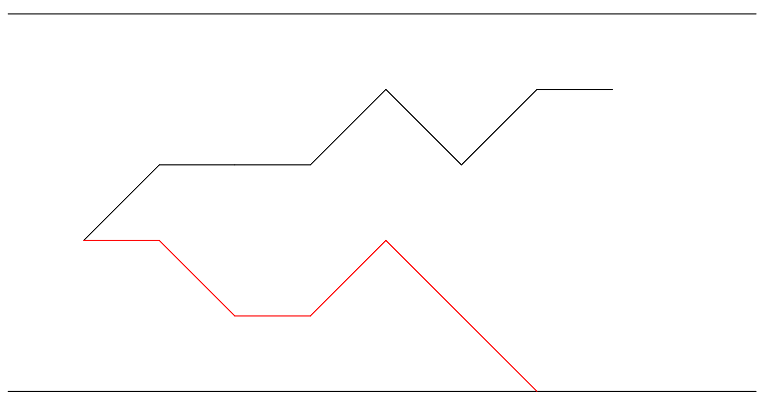

Figura 4:

Para simplificar el estudio pensemos que el nivel superior es $c > 4$y el inferior es 0 y empezamos en un punto $u \in \{i, 2, \ldots, c-i\}$ Si aplicamos las ideas del problema de la ruina a esta situación tendremos la siguiente ecuación,

$$h(u) = ph(u+1) + qh(u-1) + rh(u)$$

que es lo mismo que

$$h(u)(1-r) = ph(u+1) + qh(u-1)$$

y que

$$h(u) = \frac{p}{p+q}h(u+1) + \frac{q}{p+q}h(u-1)$$

si observamos los cálculos hechos para el problema de la ruina veremos que la probabilidad de llegar a 0 o a c , son las mismas que el caso de de la caminata simple, y esto porque porque el cociente de los coeficientes r es el mismo.

$$r = \frac{\frac{p}{p+q}}{\frac{q}{p+q}} = \frac{p}{q}$$

Se pregunta al lector si cree que la esperanza de los tiempos de llegada serán también iguales al caso anterior o si al menos serán finitas y si esta propiedad depende o no de los valores de p, q, r. Para ver la respuesta consulte [2]

5 Caso del Movimiento Browniano

Podemos plantear un problema análogo para un proceso en tiempo contínuo, lo que es en general mucho más difícil de resolver pero que tiene una gran importancia en una gran variedad de modelos matemáticos ligados a los más diversos fenómenos aleatorios de la naturaleza.

Si se tiene un proceso más general que lo tratado en secciones anteriores, la pregunta es la misma: ¿se puede saber con que probabilidad sale de un cierto intervalo dado? Veamos el caso más conocido: el del movimiento browniano:

El Movimiento Brownianno $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que evoluciona en el tiempo de manera contínca, es decir los subíndices del proceso varían en $\mathbb{R}^+$ y queda definido como sigue:

- $B_0 = 0$
- tiene trayectorias contínuas.
- B_t tiene densidad normal $\mathcal{N}(0, t)$
- Es un proceso con incrementos independientes, esto significa que para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera tiempos $0 \geq t_1 < t_2 < \cdots t_n$, las variables aleatorias
$$(B_{t_i} - B_{t_j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$$
son variables aleatorias independientes.
- Tiene incrementos estacionarios, es decir, la distribución de $(B_{t+h} - B_t)$ es la misma que la de $(B_{r+h} - B_r)$ para cualesquiera $t, r \geq 0$

Observe que en este caso las trayectorias del proceso son funciones de $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ y una trayectoria es, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, la función $t \to B_t(\omega)$. El proceso que empieza en $x \in \mathbb{R}$ se define como $(x + B_t : t \geq 0)$

Por lo que se ha dicho en la definición B_t tiene densidad normal de media 0 y varianza t, así que la densidad de $x + B_t$ es:

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t})$$

y en esta fórmula la x inicial queda fija. Podemos entonces plantear preguntas similares al caso de la caminata aleatoria:

- ¿Cuál es la probabilidad que habiendo empezado en el punto $x > 0$ llegue primero a $c > x > 0$) que a cero? (el jugador A gana).
- Si tenemos un MB que empieza en 0 y $a > 0, b > 0$ son dos reales positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que salga del intervalo $(-a, b)$ por $-a$ y cual la de que salga por b? Esto por traslación es equivalente a pensar en el intervalo $(0, a + b = c)$ y en un MB que empiece en $a = x$.
- Es cierto que con probabilidad 1 sale de cualquier intervalo finito?

Teorema 5.1. *Si B es un movimiento Browniano que empieza en $x > 0$ y sea $c > x > 0$. Entonces*

$$\mathbb{P}(\tau_c < \tau_0 | B_0 = x) = \frac{x}{c}; \ \ \mathbb{P}(\tau_c > \tau_0 | B_0 = x) = \frac{c-x}{c}$$

donde

$$\tau_u := \inf\{t > 0 : B_t = u\} \ \ u \in \mathbb{R}$$

Podemos de inmediato ver que es el mismo resultado que para las caminatas aleatorias simétricas (es decir $p = q = 1/2$). Si recordamos que existen teoremas que nos permiten aproximar al MB mediante un re-escalamiento cada vez más fino en el tiempo y el espacio de las caminatas aleatorias simples simétricas , podríamos pensar que el resultado se deduce de las propiedades correspondientes de ellas. Pero en realidad esto no es así. El tipo de convergencia (topología de Skorohod) que se tiene, no respeta, por lo general estas propiedades. La demostración es totalmente diferente del caso discreto y no se hará en este texto, Sólo indicaremos que se hace básicamente usando un resultado vinculado con a la densidad de $x + B_t$. Un cálculo elemental muestra que esta función, satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2}.$$

y entonces para una fiunción medible y acotada $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función

$$U(t, x, y) := \boldsymbol{E}\left(u(x + B_t)\right)$$

también satisface esta ecuación por derivación bajo el signo de la integral. Si ahora se toma $u(y) = 1_{\tau_c < \tau_0}(y)$ y se hacen cálculos adicionales se obtiene el resultado. Otros métodos de prueba utilizan la teoría de las martingalas.

Además de este resultado para el MB, se pueden estudiar otros modelos en la teoría de riesgo que son procesos en tiempo contíndo pero con trayectorias discontínuas. Algunos de estos modelos han sido desarrollando recientemente por probabilistas mexicanos y sus colaboradores (vea la bibliografía 4 a 9) e incluyen a procesos del tipo:

- Cramer- Lundberg
- Lévy simétricos
- Lévy espectralmente negativos

Esto ha permitido acceder a modelos más precisos y útiles en diversas aplicaciones, pero, naturalmente , es trabajo de investigación que requiere de conocimientos más avanzados de probabilidad y de procesos estocásticos.

Observaciones Finales

La solución al problema de la ruina de la primera parte de este trabajo, aparece en el libro de Kai-Lai-Chung. En muchos otros libros se hace con la teoría de martingalas y con el teorema de muestreo opcional. El problema de la ruina asociado a una caminata aleatoria perezosa, lo hace A. Gut en su artículo [2] y lo hace de otra manera.

References

[1] Kai Lai Chung, Elementary probability theory with stochastic processes, *Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag*, New York-Heidelberg-Berlin, (1979).

[2] A. Gut, The gambler's ruin problem with delay, *Stats and Porb Letters*, **83**, 25–49, (2013).

[3] G. F. Lawson, Introduction to stochastic processes, *Chapman, Hall*, (2006)

[4] M. E. Caballero, J. C. Pardo y J. L. Pérez, Explicit identities for Lévy processes associated to symmetric stable processes, *Bernoulli* **17** (2011), 1, 34–59.

[5] Laurent Denis, Begoña Fernández, Ana Meda, Estimation of value at risk and ruin probability for diffusion processes, *Journal: Mathematical Finance*, **19**, no. 2, pp. 281–302 (2009).

[6] Begoña Fernández, Daniel Hernández-Hernández, Ana Meda, Patricia Saavedra, An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability, *Journal: Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 68, no. 1, pp. 159–179 (2008).

[7] A. Hinojosa, Caminata aleatoria asociada y la martingala de Wald. *Tesis de Licenciatura*, FCUNAM, 2013.

[8] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y V. M. Rivero, Exact and asymptotic n-tuple laws at first and last passage. (with A.E. Kyprianou and V.M. Rivero, *Ann. of Appl. Probab*, **20** (2010), 2, 522–564.

[9] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y J. L. Pérez, Occupation times of refracted Lévy processes, To appear in *Journal of Theoretical Probability* (2014).

[10] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo y A. Watson, Hitting distributions of alpha-stable processes via path censoring and self-similarity. *Ann. Probab.*, **42**, 398–430, (2014).