

EL MINORANTE CONVEXO DE CAMINATAS ALEATORIAS

GERÓNIMO URIBE BRAVO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ÁREA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
CIRCUITO EXTERIOR, CIUDAD UNIVERSITARIA
COYOACÁN, 04510. MÉXICO, D. F.
E-MAIL: geronimo@matem.unam.mx

RESUMEN. La teoría de fluctuaciones se centra en el estudio de la relación entre la caminata aleatoria $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$ y su mínimo acumulativo M dado por $M_n = \min_{m \leq n} S_m$.

Se presentará una transformación trayectorial de tipo combinatorio de la caminata aleatoria S que permite describir probabilísticamente a su minorante convexo. Esto da lugar a representaciones nuevas de M_n , o del lugar en que se alcanza dicho mínimo. Las representaciones permiten estudiar teóricamente o simular a dichas variables sin necesidad de generar a toda la trayectoria de la caminata.

Como un ejemplo, se dará una interpretación a la fórmula de Baxter

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \mathbb{E}(S_m \mathbf{1}_{S_m < 0})$$

que liga a la caminata aleatoria con su mínimo acumulativo.

ABSTRACT. Fluctuation theory is focused on the study of the relationship between random walk $S = (S_n, n \in \mathbb{N})$ and its cumulative minimum process M given by $M_n = \min_{m \leq n} S_m$.

We will present a path transformation of our random walk which allows for a probabilistic description of its convex minorant. We obtain, in particular, new representations for M_n or the place at which this minimum is achieved by the random walk. These representations have theoretical consequences as well as simulation schemes which do not need one to simulate the whole random walk path.

As an example, we will give an interpretation to Baxter's formula

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \mathbb{E}(S_m \mathbf{1}_{S_m < 0})$$

which links random walk to its cumulative minimum.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60G51.

Palabras Claves. Caminatas aleatorias, transformaciones trayectoriales, transformación de Vervaat.

El objetivo del presente artículo es presentar una transformación trayectorial que permite describir al minorante convexo de una caminata aleatoria. Esta transformación fue introducida en [2] para caminatas aleatorias y analizada en el contexto de procesos de Lévy y movimiento browniano en [9] y [8]. Se puede consultar también el artículo de revisión [1]. Basándonos en [2], tomaremos un punto de vista combinatorio, vía la célebre transformación trayectorial de Vervaat, para estudiar directamente a la transformación trayectorial y veremos algunas consecuencias simples pero interesantes. Como se discute en [2], esta transformación trayectorial puede proporcionar un punto de entrada distinto a la teoría de fluctuaciones de caminatas aleatorias, pues en particular, explica la independencia entre los procesos pre y post mínimo de una caminata aleatoria.

1. CAMINATAS ALEATORIAS

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias con valores en \mathbb{R} , mismas que asumiremos independientes e idénticamente distribuidas. Para simplificar los enunciados, asumiremos que la distribución de X_1 es continua, es decir, que

(H): $\mathbb{P}(X_1 = x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

A partir de la sucesión X , construiremos una nueva sucesión S_0, S_1, \dots definida por

$$S_0 = 0 \quad \text{y} \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{para } n \geq 1.$$

A la sucesión S se le conoce como sucesión de sumas parciales asociadas a la sucesión X . También se le conoce como caminata aleatoria, en cuyo caso llamamos saltos a las variables X_i . Una consecuencia importante de la hipótesis **(H)** es la siguiente propiedad, que constituye un buen ejercicio para ir adentrándose en la teoría.

Ejercicio 1.1. *Bajo la hipótesis **H** todos los valores S_1, S_2, \dots son distintos con probabilidad 1.*

La sucesión de sumas parciales asociada a variables independientes e idénticamente distribuidas es un objeto muy importante dentro de la probabilidad. Como ejemplo, notemos que la ley fuerte de los grandes números es la afirmación siguiente: si $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$ entonces la sucesión de promedios (S_n/n) converge a la media de X_1 .

Tal vez sean menos conocidos los resultados sobre teoría de fluctuaciones para caminatas aleatorias. La teoría de fluctuaciones tiene que ver con otras funcionales de S_n , en particular los valores máximos de una caminata aleatoria. Uno de los pioneros en su desarrollo fué el matemático danés Erik Sparre Andersen quien sentó las bases en los artículos [4], [3] y [5]. A continuación se describen los resultados contenidos en dichos artículos.

Fijemos un umbral n y definamos a

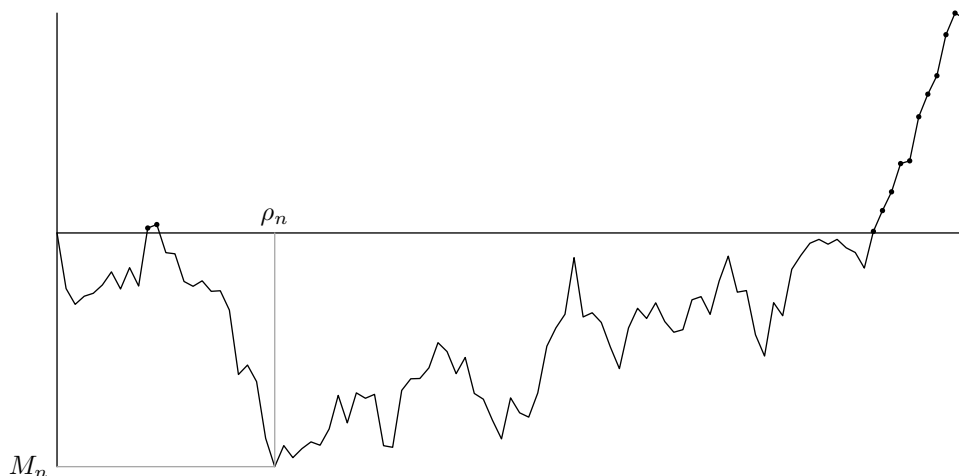


FIGURA 1. Trayectoria de 100 pasos de una caminata aleatoria con incrementos gaussianos. Los sumandos positivos se distinguen con un punto y hay 13 de ellos ($A_n = 13$).

- la cantidad de sumas parciales positivas

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{S_i > 0}$$

- el mínimo valor que toma la caminata aleatoria entre 0 y n :

$$M_n = \min_{m \leq n} S_m,$$

- el máximo valor que toma la caminata aleatoria entre 0 y n :

$$M^n = \max_{m \leq n} S_m,$$

- el primer instante entre 0 y n en que la caminata es igual al mínimo:

$$\rho_n = \min \{m \leq n : S_m = M_n\} \text{ y}$$

- el primer instante entre 0 y n en que la caminata es igual al máximo:

$$\rho^n = \min \{m \leq n : S_m = M^n\}.$$

En las Figuras 1 y 2 se pueden visualizar dos trayectorias de 100 pasos de caminatas aleatorias con incrementos gaussianos y Cauchy respectivamente, junto con su mínimo, posición del mínimo y cantidad de pasos positivos.

Dentro de los resultados obtenidos por Andersen destaca la ley arco-seno: si la caminata aleatoria es simétrica, es decir que X_1 y $-X_1$ tienen la misma

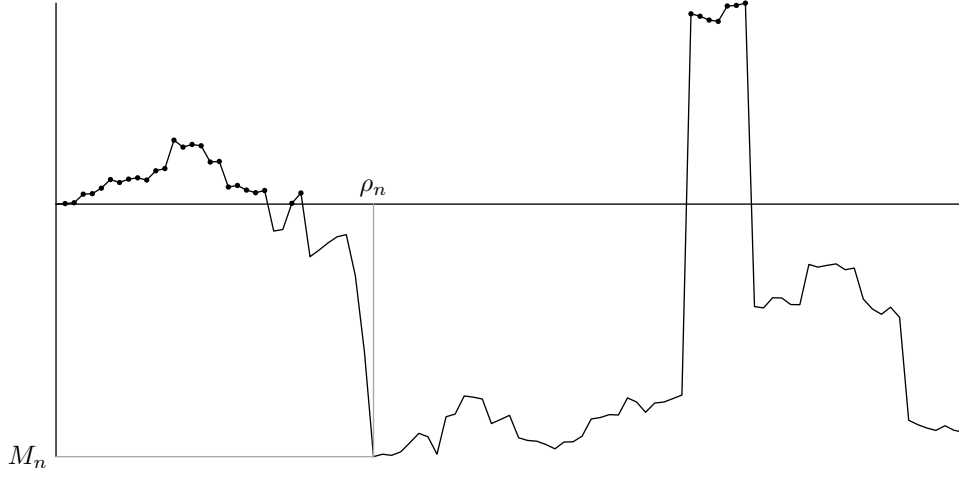


FIGURA 2. Trayectoria de 100 pasos de una caminata aleatoria con incrementos Cauchy. Los sumandos positivos se distinguen con un punto y hay 32 de ellos.

distribución, entonces

$$\mathbb{P}\left(\frac{A_n}{n} \leq x\right) \rightarrow \int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}} dy.$$

Además:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\rho_n}{n} \leq x\right), \mathbb{P}\left(\frac{\rho^n}{n} \leq x\right) \rightarrow \int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}} dy.$$

Esto es, se afirma la convergencia en distribución de la fracción de sumas positivas a una variable Beta de parámetros $1/2$ y $1/2$, así como del índice del primer mínimo y del primer máximo. Esta distribución Beta es una de las pocas para las cuales existe una expresión explícita para la función de distribución:

$$\int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}} dy = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}).$$

Se explica entonces que se haya decidido nombrarla distribución arcoseno.

Los métodos utilizados por Sparre-Andersen son combinatorios. En particular, Anderson establece sus teoremas límite al probar primero el siguiente resultado:

Teorema 1.2 (Identidad de Andersen). *Las variables A_n y ρ^n tienen la misma distribución.*

La variable que decide después estudiar Andersen es la de ρ^n pues se puede utilizar más directamente el hecho de que las variables X_1, X_2, \dots sean independientes e idénticamente distribuidas.

Este tipo de desarrollos pueden consultarse en el volumen I del libro clásico de Feller [6]. De hecho, el capítulo de fluctuaciones de la caminata aleatoria simple fue reescrito en dicha edición para poder basar la teoría en los métodos combinatorios comenzados por Andersen. (Baso esta afirmación en la nota al pie de página de la p. 82 del citado libro).

2. EL MINORANTE CONVEXO DE CAMINATAS ALEATORIAS

Andersen también comenzó el estudio del minorante convexo. En un momento describiremos por qué permite abordar el estudio del mínimo de una caminata aleatoria y de su posición.

Sea S una caminata aleatoria y fijemos un umbral n . Interpolaremos linealmente a las cantidades $(S_n, n \in \mathbb{N})$ para obtener una función aleatoria definida en $[0, \infty)$; abusaremos de la notación al denotar por S_t el valor de esta interpolación, específicamente, definimos

$$S_t = S_{\lfloor t \rfloor} (\lceil t \rceil - t) + S_{\lceil t \rceil} (t - \lfloor t \rfloor),$$

donde $\lfloor t \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual a t mientras que $\lceil t \rceil$ denota al menor entero mayor o igual a t .

Siempre hay una función convexa menor o igual a S en $[0, n]$; en efecto, $c(t) = M_n$ para $t \in [0, n]$ es una tal función. Por otra parte, recordemos que el supremo de una familia de funciones convexas que está acotada superiormente en un punto es una función convexa. Por lo tanto, podemos definir al minorante convexo de S en $[0, n]$ como la función convexa más grande que es menor o igual a S en $[0, n]$. En otras palabras, la función C dada por

$$C_t = \sup \{c(t) : c \text{ es convexa y } c \leq S \text{ en } [0, n]\}$$

es convexa, acotada superiormente por S en $[0, n]$ y si c es convexa acotada superiormente por S en $[0, n]$ entonces $c \leq C$. Una forma de imaginar al minorante convexo de una caminata aleatoria es como sigue: amarramos una cuerda al principio y al final de la trayectoria, dejando que cuelgue por debajo y luego la tensamos. El resultado será claramente una función lineal por pedazos.

Es fácil construir al minorante convexo de manera algorítmica: Definimos $C_0 = S_0 = 0$. Luego nos fijamos en la mínima pendiente formada desde cero:

$$P_1 = \min_{m \leq n} \frac{S_m}{m}$$

así como en el último punto de contacto con dicha recta

$$K_1 = \max \left\{ m \leq n : \frac{S_m}{m} = P_1 \right\}.$$

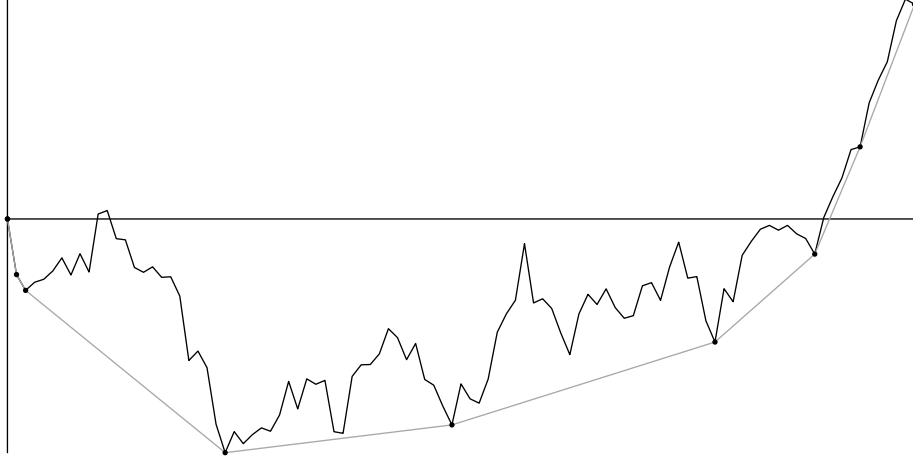


FIGURA 3. Minorante convexo de una caminata aleatoria de 100 pasos con incrementos gaussianos. Hay 9 puntos de contacto.

El minorante convexo será igual a $\rho_1 t$ en $[0, K_1]$.

Ejercicio 2.1. *Bajo la hipótesis \mathbf{H} , existe casi seguramente un único elemento en*

$$\left\{ m \leq n : \frac{S_m}{m} = P_1 \right\}.$$

Posteriormente, formamos la mínima pendiente posterior a K_1 :

$$P_2 = \min \left\{ K_1 < m \leq n : \frac{S_m - S_{K_1}}{m - K_1} \right\}$$

así como al último punto de contacto con dicha recta:

$$K_2 = \max \left\{ K_1 < m \leq K_1 : \frac{S_m - S_{K_1}}{m - K_1} = P_1 \right\}.$$

El minorante convexo será igual a $S_{K_1} + P_2(t - K_1)$ en $[K_1, K_2]$. Así continuaremos hasta que terminemos de ver toda la trayectoria. En las Figuras 3 y 4 se pueden apreciar los minorantes convexos de las caminatas aleatorias de 100 pasos ilustradas anteriormente.

En particular, generaremos una cantidad aleatoria F_n de puntos de contacto K_1, \dots, K_{F_n} , que dividen al minorante convexo en lo que podemos denominar sus caras. Un resultado de Andersen nos dice que bajo la hipótesis \mathbf{H} la distribución de la cantidad de caras F_n no depende de la distribución de X_1 . Además, veremos por qué razón F_n es de orden $\log(n)$.

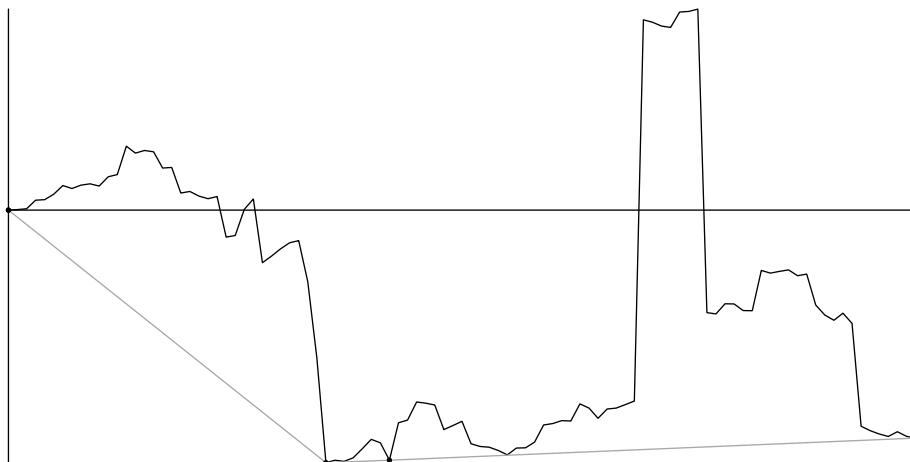


FIGURA 4. Minorante convexo de una caminata aleatoria de 100 pasos con incrementos Cauchy. Hay 4 puntos de contacto, aunque visualmente parezca que hay uno más.

Una de las razones por las cuales es interesante el minorante convexo en teoría de fluctuaciones es la siguiente: es más fácil minimizar al minorante convexo que a la caminata aleatoria puesto que su derivada (lateral derecha) es no decreciente. Así, es suficiente ver en qué punto el minorante convexo tiene su primera pendiente no-negativa para encontrar el lugar en el que se minimiza la caminata aleatoria. En otras palabras, vemos que

$$\rho_n = \sum_i [K_i - K_{i-1}] \mathbf{1}_{P_i < 0}.$$

si $K_0 = 0$. Además, tenemos una representación similar para el mínimo de la caminata aleatoria:

$$M_n = \sum_i [C_{K_i} - C_{K_{i-1}}] \mathbf{1}_{P_i < 0}.$$

3. LA TRANSFORMACIÓN DE VERVAAT

Por supuesto, las expresiones anteriores para el mínimo de una caminata aleatoria no nos sirven de mucho si no tenemos una manera adicional de entender al minorante convexo. Esto es, el estudio directo del minorante convexo puede parecer complicado. Por ejemplo, calculemos la probabilidad de que la

primera cara del minorante convexo tenga longitud k :

$$\mathbb{P}(K_1 = k) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{k-1}}{k-1} \geq \frac{S_k}{k} \text{ y } \frac{S_{k+1}}{k}, \dots, \frac{S_n}{n} > \frac{S_k}{k}\right).$$

Cuando $k = n$, la fórmula anterior toma la forma

$$\mathbb{P}(K_1 = n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} \geq \frac{S_n}{n}\right),$$

que quiere decir que la gráfica de S siempre está por encima de la recta que une $(0, 0)$ con (n, S_n) . Afortunadamente, el trabajo reciente [2] presenta una descripción probabilística del minorante convexo que es bastante útil. Un ejemplo del tipo de argumentos en los que se basa es el caso particular

$$\mathbb{P}(K_1 = n) = \frac{1}{n}$$

que se satisface bajo la hipótesis **H**. El argumento para probar dicha igualdad, que es combinatorio, es el siguiente. Lo primero es fijarse que la caminata aleatoria es invariante ante permutaciones, en particular ante permutaciones cíclicas. En efecto, si σ es una permutación de $1, \dots, n$ y definimos

$$X_i^\sigma = X_{\sigma(i)} \quad \text{y} \quad S_i^\sigma = X_1^\sigma + \dots + X_i^\sigma$$

entonces S^σ tiene la misma distribución que S . En particular, esto sucede para las llamadas permutaciones cíclicas, de las cuales hay n y están dadas por

$$c^k(i) = \begin{cases} k+i & i+k \leq n \\ k+i-n & i \leq n, i+k > n \end{cases} \quad \text{para } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

A la caminata aleatoria afectada por la permutación cíclica c^k la denotaremos por S^k . Ahora, notemos que bajo **H** existe un único índice K (aleatorio) tal que S^K se encuentra por encima del segmento que une sus valores inicial y final. En efecto, basta tomar K igual al índice en que ocurre el mínimo de $S_i - i/nS_n$, que será único bajo la hipótesis **H**. Finalmente, escribimos

$$\mathbb{P}(K = n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} < \frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(\frac{S_1^k}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}^k}{n-1} < \frac{S_n^k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

donde la última igualdad se justifica por la ley de la probabilidad total al utilizar que hay un único índice K tal que S^K queda por encima del segmento que une sus valores inicial y final. Este tipo de argumentos son la base combinatoria de la descripción que haremos del minorante convexo de una caminata aleatoria. Sin embargo, aprovecharemos la discusión para introducir otro ingrediente importante: la transformación de Vervaat.

La transformación de Vervaat resulta de responder la siguiente interrogante: ¿cómo se comporta la caminata aleatoria si la condicionamos con el evento en

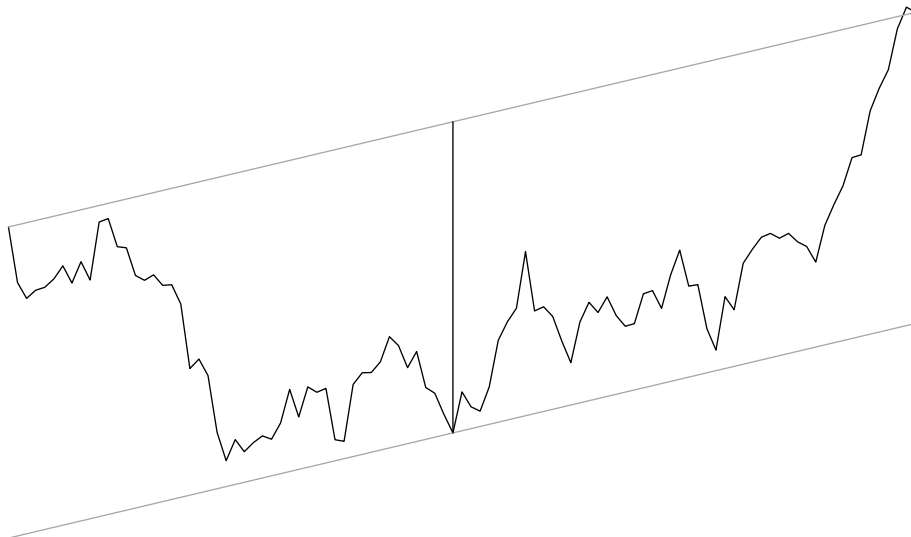


FIGURA 5. Caminata aleatoria con incrementos gaussianos y $K = 49$.

que permanece por debajo de la cuerda que une sus puntos inicial y final? La respuesta es de nuevo sencilla y se obtiene mediante un argumento combinatorio bajo **H**. Sea $V = S^K$, donde K es el índice de la única permutación cíclica que hace que la caminata aleatoria quede por debajo de su valor inicial y final. A V se le conoce como la transformada de Vervaat de S . La transformación de Vervaat para nuestra caminata aleatoria con incrementos gaussianos se puede visualizar en las Figuras 5 y 6.

Un caso particular del siguiente teorema fue encontrado por Vervaat y publicado en [10].

Teorema 3.1. *La distribución condicional de*

$$(S_1, \dots, S_n) \left| \left\{ \frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n} \right\} \right.$$

es la distribución de V_1, \dots, V_n .

En otras palabras, se afirma que

$$\mathbb{P}\left(S_1 \leq x_1, \dots, S_n \leq x_n \left| \frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}\right.\right) = \mathbb{P}(V_1 \leq x_1, \dots, V_n \leq x_n)$$

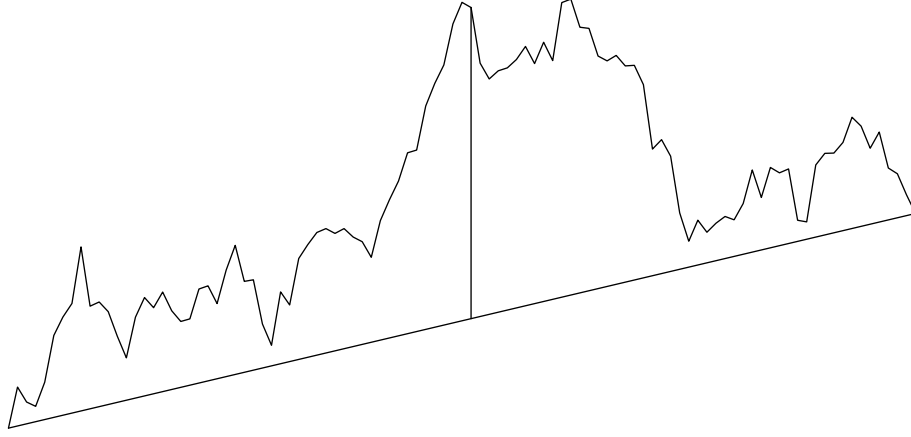


FIGURA 6. Transformación de Vervaat de la caminata aleatoria con incrementos gaussianos con $K = 49$.

para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, se afirma que para cualquier función continua $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left(F(S) \mathbf{1}_{\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}}\right) = \mathbb{E}(F(V)).$$

Demostración. Sea V la transformación de Vervaat de S ; esta coincide con la transformación de Vervaat de S^k . Por lo tanto, para cualquier función continua $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(F(S) \mathbf{1}_{\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}}\right) = \mathbb{E}(F(V) \mathbf{1}_{K=0}) = \mathbb{E}(F(V) \mathbf{1}_{K=k})$$

para cualquier $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left(F(S) \mathbf{1}_{\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(F(V) \mathbf{1}_{K=k}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(F(V) \mathbf{1}_{K(S^k)=0})$$

y puesto que hay un único $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $K(S^k) = 0$ se sigue que

$$\mathbb{E}\left(F(S) \mathbf{1}_{\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(F(V)).$$

Ya habíamos probado que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

de lo cual se sigue que

$$\mathbb{E}\left(F(S) \mid \frac{S_1}{1}, \dots, \frac{S_{n-1}}{n-1} > \frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}(F(V)). \quad \square$$

Notemos que la transformación que manda a S en (V, K) es invertible: dadas V y K podemos reconstruir a S al partir a V en dos pedazos, en $n - K$, e intercambiarlos.

4. LA TRANSFORMACIÓN 3214

Ahora presentaremos la transformación clave que permite estudiar al minorante convexo de una caminata aleatoria. Sea S la caminata aleatoria con saltos X_1, X_2, \dots (extendida a $[0, \infty)$ por interpolación lineal, fijemos al umbral n y sea C el minorante convexo de S en $[0, n]$. Recordemos que habíamos definido a los puntos de contacto con el minorante convexo K_1, \dots, K_{F_n} que dividen al minorante en sus distintas caras. Sus longitudes respectivas son L_1, \dots, L_{F_n} e iguales a $L_i = K_i - K_{i-1}$ (donde definimos $K_0 = 0$). Ahora seleccionaremos una cara al azar y lo haremos mediante la introducción de una variable aleatoria uniforme U entre 1 y n . Entonces U pertenece a una cara del minorante convexo que comienza, digamos en g , y termina en d . Notemos que el efecto de utilizar a la variable aleatoria uniforme U para escoger una cara del minorante convexo es que las caras más grandes tienen mayor probabilidad de ser escogidas. De hecho, la probabilidad de escoger cierta cara depende de su longitud. Es por esto que esta manera de seleccionar una cara se le ha llamado muestreo sesgado por tamaño.

Con las 3 cantidades $g \leq U \leq d$ (aunque en principio U podría coincidir con d) podemos dividir a la trayectoria de S en 4 pedazos mismos que reordenaremos como 3, 2, 1 y 4 para formar una nueva trayectoria. La definición formal es la siguiente. Consideremos a \tilde{S} definida mediante:

$$\tilde{S}_k = \begin{cases} S_{U+k} - S_U & 0 \leq k < d - U \\ S_{g+k-(d-U)} - S_g + S_d - S_U & d - U \leq k < d - g \\ S_{k-d-g} + S_d - S_g & d - g \leq k < d \\ S_k & d \leq k \leq n \end{cases}.$$

El lector puede visualizar el efecto de esta transformación en la Figuras 7 y 8.

El siguiente teorema es inesperado pero admite una prueba simple.

Teorema 4.1. *Bajo \mathbf{H} , hay igualdad en distribución entre (S, U) y $(\tilde{S}, d - g)$.*

En particular, obtenemos la sorprendente conclusión de que una cara del minorante muestreada por tamaño tiene un tamaño uniforme y que el incremento del minorante convexo en dicha cara, condicionalmente a que la cara tenga tamaño k , tiene la misma distribución que S_k .

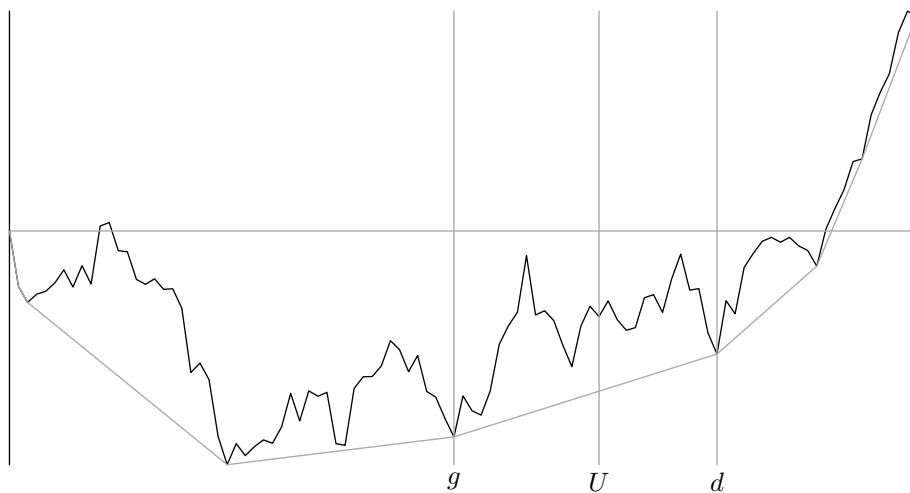


FIGURA 7. Caminata aleatoria gaussiana dividida en 4 partes en los instantes g , U y d junto con su minorante convexo.

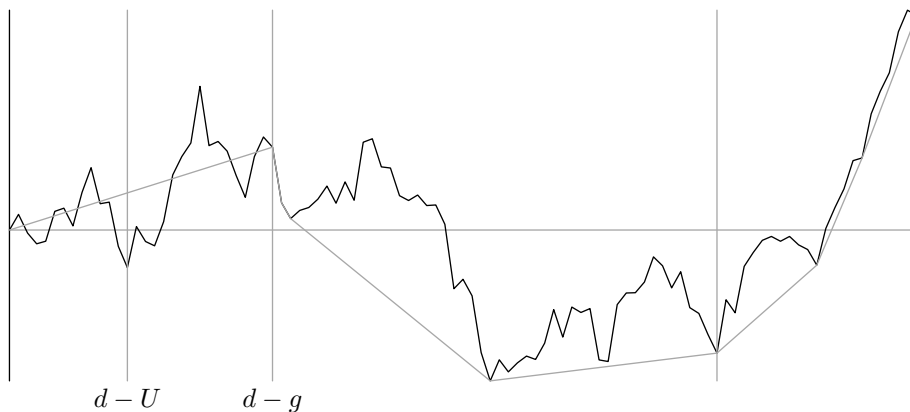


FIGURA 8. Efecto de la transformación 3214 en la caminata aleatoria gaussiana. Nótese como el minorante convexo de las partes 3 y 4 se obtiene del minorante convexo original al quitar las partes 2 y 3.

Demostración. Comenzamos por observar que la transformación

$$(S, U) \mapsto (\tilde{S}, d - g)$$

es invertible bajo la hipótesis **H**. En efecto, sólo hace falta ver cómo identificar los 4 pedazos de la trayectoria original. Dadas \tilde{S} y $d - g$, partimos a la trayectoria \tilde{S} en dos pedazos: el que precede y el que sigue a $d - g$. Al primer pedazo le aplicamos la transformación de Vervaat, el instante del mínimo será precisamente $U - g$ y calculamos su pendiente (esto nos da las partes 3 y 2 en la trayectoria original, que luego de la transformación de Vervaat se tornan en 2 y 3). Luego, intercalamos el resultado en el segundo pedazo al calcularle a este el minorante convexo. Hay un único lugar en el que es posible intercalar: en el minorante convexo las pendientes irán creciendo hasta sobrepasar la pendiente del primer pedazo, lo cual nos da acceso a la cantidad g y por ende también a U ; ahí es donde la transformación de Vervaat se intercala.

Sea Π_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$. Si $\sigma \in \Pi_n$, sea S^σ la caminata aleatoria cuyos saltos son $X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n}$. Se denotará por \tilde{S}^σ a la transformada 3214 de S^σ (y utilizaremos el superíndice σ para las cantidades relacionadas).

Ahora, para cada $\omega \in \Omega$, definamos al conjunto de las trayectorias posibles de las permutaciones de la caminata aleatoria

$$E(\omega) = \{(S_1^\sigma(\omega), \dots, S_n^\sigma(\omega)) : \sigma \in \Pi_n\}.$$

Notemos que $\tilde{S}^\sigma(\omega) \in E(\omega)$ para cualquier permutación σ . Puesto que la transformación 3214 es invertible se sigue que la función de $E(\omega) \times \{1, \dots, n\}$ en sí mismo que asigna a cada par $(S^\sigma(\omega), U(\omega))$ el par $(\tilde{S}^\sigma(\omega), d^\sigma(\omega) - g^\sigma(\omega))$ es una biyección. Por lo tanto:

$$\sum_{\sigma \in \Pi_n} F(\tilde{S}^\sigma, d^\sigma - g^\sigma) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} F(S^\sigma, U).$$

Por otra parte, puesto que S y S^σ tienen la misma distribución se sigue que

$$\mathbb{E}(F(\tilde{S}^\sigma, d^\sigma - g^\sigma)) = \mathbb{E}(F(\tilde{S}, d - g)).$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F(\tilde{S}, d - g)) &= \frac{1}{n!} \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma \in \Pi_n} F(\tilde{S}^\sigma, d^\sigma - g^\sigma)\right) \\ &= \frac{1}{n!} \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma \in \Pi_n} F(S^\sigma, U)\right) \\ &= \mathbb{E}(F(S, U)). \end{aligned} \quad \square$$

Podemos iterar a la transformación 3214. Esto se sigue pues el minorante convexo de la trayectoria en los pedazos 1 y 4 queda invariante. Por lo tanto, si la primera cara que escogimos tiene longitud k , podemos escoger otra cara

del minorante al trabajar con la trayectoria \tilde{S} al considerar una variable uniforme U_2 en $\{k+1, \dots, n\}$ y repetir la transformación 3214 pero sólo en $\{k, \dots, n\}$. Puesto que muestreamos una cara cada vez, en F_n pasos habremos terminado de muestrear al minorante convexo y obtendremos una caminata aleatoria y una sucesión de variables muy interesante. Comencemos con esta última.

Definición 4.2. *Se construye el proceso de asignación residual uniforme en $\{1, \dots, n\}$ R_1, R_2, \dots como sigue: sea R_1 uniforme en $\{1, \dots, n\}$. Si $R_1 = n$ entonces $R_2 = R_3 = \dots = 0$. En otro caso, condicionalmente al evento $R_1 = m < n$ R_2 es uniforme en $\{1, \dots, n-m\}$. Si $R_1 + R_2 = n$ entonces $R_3 = R_4, \dots$. Si no, condicionalmente a $R_1 = m_1, R_2 = m_2$ donde $m_1 + m_2 < n$, R_3 es uniforme en $\{1, \dots, n-m_1-m_2\}$. Así continuamos recursivamente.*

Lo primero que observamos al iterar la transformación 3214 es el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *Bajo la hipótesis \mathbf{H} , la muestra sesgada por tamaño de las caras del minorante convexo de S tiene la misma distribución que el proceso de asignación residual uniforme.*

En particular, vemos que la distribución de una muestra sesgada por tamaño de las caras no depende de la distribución de salto de la caminata aleatoria. Aún más, notemos que el número de caras del minorante convexo coincide con la cantidad de índices i tales que $R_i \neq 0$. Este caso particular ya lo había probado Andersen.

Sin embargo, podemos ir más lejos, pues el proceso de asignación residual uniforme ha sido ampliamente estudiado. Se puede consultar [7], donde se liga a este proceso con las permutaciones aleatorias uniformes y el proceso del restaurante chino. Un resultado importante sobre el proceso de asignación residual uniforme es su invariancia ante muestras sesgadas por tamaño. En particular, R_1 tiene la misma distribución que una muestra sesgada por tamaño de R en el sentido siguiente: si \tilde{R}_1 es tal que

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_1 = R_i \mid R_1, \dots, R_n) = \frac{R_i}{n}$$

entonces \tilde{R}_1 es uniforme. Una consecuencia inmediata es la siguiente.

Proposición 4.4. *Para cualquier función $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{E}\left(\sum_i f(R_i)\right) = \sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{n}.$$

Otro ejemplo de aplicación del teorema 4.1 es que podemos calcular la distribución conjunta de las longitudes y los incrementos de las caras del minorante convexo.

Teorema 4.5. Sean K_1, \dots, K_{F_n} los puntos de contacto de la caminata aleatoria S con su minorante convexo en $[0, n]$. Sean R_1, \dots, R_N los valores distintos a cero de un proceso de asignación residual uniforme en $\{1, \dots, n\}$. Supongamos que R es independiente de S . Bajo la hipótesis **H** hay igualdad en distribución entre

$$\begin{aligned} & (K_1, K_2 - K_1, \dots, K_{F_n} - K_{F_n-1}, S_{K_1}, S_{K_2} - S_{K_1}, \dots, S_{K_{F_n}} - S_{K_{F_n-1}}) \\ & \stackrel{d}{=} (R_1, R_2, \dots, R_n, S_{R_1}, S_{R_2} - S_{R_1}, \dots, S_{R_N} - S_{R_{N-1}}). \end{aligned}$$

Ahora veremos qué implicaciones tiene el anterior resultado sobre el mínimo M_n de una caminata aleatoria en $[0, n]$ y sobre el índice ρ_n en que se alcanza. Puesto que el mínimo se obtiene de sumar los incrementos negativos, vemos que

$$M_n \stackrel{d}{=} \sum [S_{R_k} - S_{R_{k-1}}] \mathbf{1}_{S_{R_k} - S_{R_{k-1}} < 0}.$$

De igual manera, observamos que

$$\rho_n \stackrel{d}{=} \sum [R_k - R_{k-1}] \mathbf{1}_{S_{R_k} - S_{R_{k-1}} < 0}.$$

Las anteriores relaciones tienen una importancia concreta a nivel práctico. Nos dicen que si queremos simular al mínimo de una caminata aleatoria junto con su posición, no tenemos que simular a toda la trayectoria de la caminata aleatoria de n pasos. Bastara simular a la caminata aleatoria en los puntos que nos dicta un proceso de asignación residual uniforme, que serán del orden del logaritmo de la longitud de la trayectoria (cf. ecuación (3.2) p.56, en [7]). Cambio en la bibliografía: Se ha puesto la bibliografía en el formato de las memorias. Se ha puesto el nombre de Lévy en mayúsculas en la referencia [1]. Cambio en la bibliografía: Se ha cambiado brownian por Brownian. Cambio en la bibliografía: se ha agregado información bibliográfica a la referencia [8]

Finalmente, observamos que

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\sum [S_{R_k} - S_{R_{k-1}}] \mathbf{1}_{S_{R_k} - S_{R_{k-1}} < 0}\right);$$

al condicionar por los valores de R y definir $f(k) = \mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{S_k < 0})$, de la Proposición 4.4 vemos que

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\sum f(R_k)\right) = \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{S_k < 0})}{k}.$$

El lector puede consultar el artículo de revisión [1] y sus referencias para mayor información sobre el uso de la transformación 3214 en la teoría de fluctuaciones de caminatas aleatorias y procesos de Lévy.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Abramson, J. Pitman, N. Ross, and G. Uribe Bravo, *Convex minorants of random walks and Lévy processes*, Electronic Communications in Probability **16** (2011), 423–434.
- [2] J. Abramson and J. Pitman, *Concave Majorants of Random Walks and Related Poisson Processes*, Combinatorics, Probability and Computing **20** (2011), no. 05, 651–682. DOI: [10.1017/S0963548311000307](https://doi.org/10.1017/S0963548311000307).
- [3] E. S. Andersen, *On the number of positive sums of random variables*, Skand. Aktuarietidskr. **32** (1949), 27–36. MR0032115 (11,256a)
- [4] ———, *On the fluctuations of sums of random variables*, Math. Scand. **1** (1953), 263–285. MR0058893 (15,444f)
- [5] ———, *On the fluctuations of sums of random variables. II*, Math. Scand. **2** (1954), 195–223. MR0068154 (16,839e)
- [6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968. MR0228020 (37 #3604)
- [7] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR2245368 (2008c:60001)
- [8] J. Pitman and N. Ross, *The greatest convex minorant of Brownian motion, meander, and bridge*, Probab. Theory Related Fields **153** (2012), no. 3-4, 771–807. MR2948693
- [9] J. Pitman and G. Uribe Bravo, *The convex minorant of a Lévy process*, Ann. Probab. **40** (2012), no. 4, 1636–1674. DOI: [10.1214/11-AOP658](https://doi.org/10.1214/11-AOP658).
- [10] W. Vervaat, *A relation between Brownian bridge and Brownian excursion*, Ann. Probab. **7** (1979), no. 1, 143–149. MR515820 (80b:60107)